Université Paris 7 - Denis Diderot - Département SNV L1 Sciences du Vivant

MT12 - Mathématiques 2013-2014

2ème semestre

Table des matières

Des exercices ne seront pas obligatoirement corrigés pendant les séances de Travaux dirigés, en particulier ceux notés avec une étoile (*) ; il est vivement conseillé de les résoudre par un travail personel.

Ces exercices, issus des années précédentes, ont été regroupés et modifiés par Laure Beaury et Yvette Pons.

Feuille 1 : Fonction de plusieurs variables : dérivées, différentielle, extrema

I : Dérivées partielles premières et différentielle

1. Calculer les dérivées partielles premières, par rapport à chacune des variables, des fonctions suivantes et en déduire la différentielle de chaque fonction :

$$a)\ 4x(5y+3) \qquad b)\ \frac{1}{2(x^2+y^2)} \qquad c)\ \frac{\cos x}{y} \qquad d)\ \frac{y}{x^2} \qquad e)\ \ln(xy)$$

$$f)\ x^y + y \qquad g)\ Ae^{-\frac{x^2y^2}{a}} \quad A, a \text{ étant des constantes réelles} \qquad h)\ (*)\ 3e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$$

2. Calculer l'expression différentielle des deux membres des expression suivantes :
   $PV = nRT \quad PV^\gamma = Cste$ où P, V et T sont les trois variables respectives pression, volume et température et où n R et γ sont des constantes positives.
   (a) A partir de la première expression différentielle, retrouver la loi des transformations isothermes.
   (b) Un gaz parfait monoatomique ($\gamma = 5/3$) subit une transformation adiabatique réversible ; son état thermdynamique satisfait donc à la loi $PV^{5/3} = Cste$. La mesure du volume est faite avec une "précision' de 5% . Estimer l'incertitude relative que cela induit sur la valeur de P .

II : Dérivées partielles secondes, directes et croisées

1. Calculer les dérivées secondes directes et croisées de l'expression suivante :

$$\Phi(x,t) = a\sin\left[\omega\left(t + \frac{x}{c}\right)\right] \quad \text{où } a,\ c\ \omega \text{ sont des constantes réelles}$$

   et trouver une relation simple entre $\dfrac{\partial^2\Phi(x,t)}{\partial x^2}$ et $\dfrac{\partial^2\Phi(x,t)}{\partial t^2}$.

2. Soit la fonction f de trois variables x , y z définie par $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$
   Calculer les trois dérivées secondes directes et montrer que leur somme (laplacien) est nulle.

3. Calculer les dérivées secondes croisées de la fonction Φ précédente, de la fonction f précédente.

4. La loi de diffusion d'une substance est donnée par la relation $C(x,t) = \dfrac{A}{\sqrt{t}}exp\left(-\dfrac{x^2}{4Dt}\right)$ où x est une longueur, t un temps et D le coefficient de diffusion.
   Etablir la relation entre $\dfrac{\partial^2 C(x,t)}{\partial x^2}$ et $\dfrac{\partial C(x,t)}{\partial t}$ et en vérifier l'homogénéité.

III : Forme différentielle - différentielle (totale exacte)

1. Les formes différentielles $\delta\omega$ suivantes sont-elles des différentielles totales exactes ? Si oui déterminer LES fonctions f telles que $\delta\omega = df$:

$$a)\ \delta\omega = ydx + (x+1)dy \qquad b)\ \delta\omega = [\ln(x+y)]dx + \frac{y}{x+y}dy \qquad c)\ \delta\omega = \frac{\sin x}{y^2}dx + \frac{2\cos x}{y^3}dy$$

2. Soit la forme différentielle $\delta\omega = (ax^2 + by^2)dx + xydy$. Faut-il imposer des contraintes sur les coefficients réels a et b pour que $\delta\omega$ soit une différentielle totale exacte ? Ces contraintes étant imposées, il existe une fonction f telle que $\delta\omega = df$. Calculer la fonction f qui prend la valeur $a/3$ au point $(x = 1, y = 2)$.

IV : Extrema de fonctions de plusieurs variables

1. Soit la fonction f qui à $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ associe $f(x, y) = 6 + x^2 + y^2$. Trouver si elle admet un point singulier et déterminer s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum.

2. Même question avec : $f(x, y) = 4 - (x - 1)^2 - (y - 3)^2$

3. Même question avec : $f(x, y) = (y - 2)^2 - (x + 3)^2$

4. (*)Même question avec : $f(x, y) = 5exp[-(x^2 + y^2)]$

5. On dispose de 12 m^2 de carton pour fabriquer une boite parallélépipédique sans couvercle. Son volume est maximum pour une longueur, une largeur et une hauteur bien définies. Lesquelles ?

6. (*, cours) Ajustement par moindres carrés : On donne les quatre mesures du couple (x_i, y_i) suivantes :

i	1	2	3	4
x_i	2	3	4	5
y_i	5	9	15	21

   Déterminer l'équation de la droite associée à ce nuage de points ou droite des moindres carrés.

Feuille 2 : Droites, plans et surfaces dans $\mathbb{R}^3$ - gradient et isocontour

A : Droites et plans

On rappelle, dans $\mathbb{R}^3$ repéré par le référentiel $yOzx$,
– *les équations cartésiennes générale d'une droite, passant par le point P_0 de coordonnées $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ et parallèle au vecteur de composantes $(a,\ b,\ c)$:*

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

– *l'équation cartésienne générale d'un plan, passant par le point P_0 de coordonnées $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ et perpendiculaire au vecteur de composantes $(a,\ b,\ c)$:*

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$$

Exercice A-1 : Signification géométrique d'une équation
1) Que représente l'équation $z = 2$
– a) dans l'espace $\mathbb{R}$ repéré par l'axe Oz ?
– b) dans l'espace $\mathbb{R}^2$ repéré par le référentiel yOz ?
– c) dans l'espace $\mathbb{R}^3$ repéré par le référentiel $yOzx$?
2) Mêmes questions b) et c) avec l'équation $z = y$.
3) Mêmes questions b) et c) avec l'équation $z + y = 2$.
4) Même question c) avec l'équation $z + y + x = 3$.

Exercice A-2 : Droite dans $\mathbb{R}^3$
Dans $\mathbb{R}^3$, un point est repéré par ses coordonnées (x, y, z) par rapport à l'origine O,$(0, 0, 0)$.
1) Par quelles équations est représenté l'axe Ox ?
2) Par quelle équation est représenté le plan xOy ?
3) Donner l'équation de la droite D passant par les points $A(2, 4, -3)$ et $B(3, -1, 1)$.
4) Est-ce que cette droite passe par l'origine ?
5) En quel point cette droite D perce-t-elle
– le plan P_1 d'équation $z = -3$?
– le plan P_2 d'équation $4(x-3) - (z-1) = 0$?
– le plan P_3 d'équation $4(x-1) - (z-1) = 0$?

Exercice A-3 : Propriétés des droites dans $\mathbb{R}^3$
1) Déterminer si les droites D_1 et D_2 d'équations suivantes sont parallèles, orthogonales, gauches, sécantes.
2) Si elles se coupent, donner les coordonnées du point d'intersection.
3) Dire si elles passent par l'origine.
4) Si elles ne passent pas par l'origine, donner au moins un point "évident" par où elles passent.

Cas 1) D_1 : $\dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y+5}{4} = \dfrac{z-1}{-3}$ et D_2 : $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z}{2}$

Cas 2) D_1 : $\dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y+5}{4} = \dfrac{z-1}{-7}$ et D_2 : $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z}{2}$

Cas 3) D_1 : $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{4}$ et D_2 : $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z+2}{3}$

Exercice A-4 : Plans dans $\mathbb{R}^3$

Le plan P_1 a pour équation $2(x-3) + 4(y+5) - 6(7-z) = 0$.

1) Par quel point évident passe ce plan P_1 ?

2) Donner les composantes d'un vecteur normal à ce plan.

3) Quelle est l'équation du plan P_2 parallèle à P_1 et passant par l'origine ?

4) Quelle est l'équation du plan P_3 parallèle à P_1 et passant par le point $(x = -1, y = 2, z = 0)$?

5) Donner les composantes d'un vecteur appartenant à la droite d'intersection du plan d'équation $x = 0$ avec le plan d'équation $x + y + z = 3$

B : Vecteur gradient d'une fonction $f(x, y)$ - Contours iso-f

Exercice B-1 : Dans un plan, le point M est repéré par ses coordonnées (x, y) .

1-a) Calculer, en M les composantes du gradient des fonctions suivantes :

$f_1(x, y) = 6 + (x^2 + y^2)/2 \quad f_2(x, y) = 6 - (x^2 + y^2)/2 \quad f_3(x, y) = 6 + x^2 + \dfrac{y^2}{9} \quad f_4(x, y) = |xy|$

1-b) Tracer, sur 4 figures différentes, les courbes iso-f suivantes :

1. $f_1(x, y) = 6$ et $f_1(x, y) = 7$
2. $f_2(x, y) = 6$ et $f_2(x, y) = 5$
3. $f_3(x, y) = 6$ et $f_3(x, y) = 7$
4. $f_4(x, y) = 1$ et $f_4(x, y) = 2$

1-c) Tracer le vecteur gradient en quelques points de ces iso-f et vérifier qu'il pointe vers les valeurs croissantes de f .

Exercice B-2 : On donne les deux composantes d'un champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ de $\mathbb{R}^2$. Peut-on en déduire si ce vecteur est le gradient d'une fonction $f(x, y)$? si oui, trouver la fonction f, dans les cas suivants :

$$\overrightarrow{V_1}\begin{cases} 2x/(x^2 + y^2) \\ 2y/(x^2 + y^2) \end{cases} \qquad \overrightarrow{V_2}\begin{cases} x/(x^2 + y^2) \\ y/(x^2 + y^2) \end{cases} \qquad \overrightarrow{V_3}\begin{cases} y \\ x + 1 \end{cases} \qquad \overrightarrow{V_4}\begin{cases} ln(x + y) \\ y/(x + y) \end{cases}$$

(*)**Exercice B-3 :** Sur un chemin de randonnée, le point M, au sol, a pour coordonnées, dans $\mathbb{R}^3$, (x, y, h) où (x, y) sont les coordonnées de la projection verticale du point M, exprimées en km et h est son altitude, exprimée en m.
Sur la carte topographique correspondante, on observe le dessin de deux courbes de niveau successives (reliant les points de même altitude), C_1 et C_2, d'équations respectives :

$$\text{Pour } h = 200\ m \quad x^2 + y^2 = 1(km^2) \qquad \text{et} \qquad \text{pour } h = 100\ m \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 4(km^2) & \text{si } y < 0 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1 & \text{si } y > 0 \end{cases}$$

2-a) Dessiner les deux courbes de niveau

2-b) En déduire la trajectoire projetée rectiligne permettant de descendre, de 200 m à 100 m, suivant la pente moyenne minimum p_{min} . Valeur numérique de p_{min} ?

2-c) Les équations de ces 2 iso-contours constituent une donnée très restreinte par rapport à l'équation associée au réseau complet. Ainsi, on ne peut pas, comme en B-1-c, calculer la valeur exacte du gradient d'altitude en un point donné ; estimer $\overrightarrow{grad}\ h$ aux points $(0, 5/2)$ et $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$

C : Surfaces de R^3

Si, dans l´équation d'une surface, une des trois coordonnées, par exemple z est absente, la coupe de cette surface par un plan $z = Cste$ est la même que la coupe par le plan $z = 0$.
Lorsque l'équation d'une surface ne dépend que de la distance $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ à l'axe des z, il y a symétrie de révolution autour de cet axe. Lorsque l'équation d'une surface ne dépend que de la distance $R = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ à l'origine O, il y a symétrie sphérique autour de O

Exercice C-1 : toit
Dessiner , dans le référentiel $xOyz$ la surface définie par $z = 1 - |x|/3$ pour $|x| \leq 3$ $y \in [0, 10]$.

(*)Exercice C-2 : tuile provençale

Dessiner , dans le référentiel $xOyz$ la surface définie par $z = \sqrt{4 - x^2}$ pour $y \in [0, 10]$.

Exercice C-3 :

Que représente l'équation $x^2 + z^2 = 9$? l'équation $x^2 + y^2 = 9$? l'équation $(x-2)^2 + (z+3)^2 = 9$? l'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 9$?

(*)Exercice C-4 : plafond du tunnel de métro

Proposer une équation pour décrire le plafond du métro parisien, si Oz pointe vers le haut et Oy dans l'axe du tunnel.

Exercice C-5 : surfaces de révolution

1) Ecrire respectivement l'équation cartésienne d'un cone et d'un paraboloïde de révolution autour de Oz et de sommet $(0, 0, 0)$, puis de sommet $(0, 0, 1)$.
(*) 2) Utiliser la fonction logarithme pour fabriquer un puits infiniment profond et de plus en plus étroit vers le bas.
(*) 3) Utiliser la fonction exponentielle pour fabriquer une cloche.

I : Intégrales définies

a) Calcul direct

1) $\int_0^1 \frac{2}{1+x}dx$ 2) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ 3) $\int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2}$ 4) $\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 5) $\int_0^{1/2} \frac{dx}{1-x^2}$

6) $\int_0^T \cos(\omega t+\phi)dt$ où $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 7) $\int_0^{\pi/4} \frac{\cos(2x)dx}{[1+\sin(2x)]^2}$ 8) $\int_0^{1/2} \frac{3dx}{1+4x^2}$ 9) $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x \; dx}{\sin x}$

10) $\int_t^{t+\frac{2\pi}{\omega}} \sin(\omega t+\phi)dt$

b) Calcul après décomposition en éléménts simples

1) $\int_{-1}^0 \frac{1+x}{1-x}dx$ 2) $\int_0^1 \frac{1-x}{1+x}dx$ 3) $\int_1^2 \frac{dx}{x(1+x)}$ 4) $\int_0^{1/2} \frac{1}{(1-x)(1+x)}dx$

Expliquer pourquoi les deux premières intégrales précédentes sont égales, algébriquement puis graphiquement (symétrie).

c) Calcul après transformation de fonctions trigonométriques

$$\int_0^\pi \sin^2(x)dx \qquad \int_1^2 \frac{\sin x}{\sin(2x)}\frac{\cos x}{x}dx$$

On rappelle les transformations suivantes :

$$\sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2} \qquad \cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2} \qquad \sin(2a) = 2\sin a\cos a$$

d) Calcul après changement de variable

1) $\int_e^{e^2} \frac{dt}{t\ln t}$ (poser $u = \ln t$) 2) $\int_0^1 \frac{dx}{1+e^x}$ (poser $e^x = t$) 3) $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ (poser $x = a\cos t$)

4) $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ (poser $x = at$) 5) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ (poser $x = \tan t$) 6) $\int_{\pi/2}^{\pi/4} \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\sin(2x)dx$

d) Calcul par intégration par parties

1) $\int_0^1 xe^{-x}dx$ 2) $\int_0^{\pi/2} e^{-x}\sin(x)dx$ 3) $\int_0^1 arctan(x)dx$

II : Valeur moyenne d'une fonction

Soit une fonction continue f de la variable x. Sa valeur moyenne entre les valeurs $x = a$ et $x = b$ appartenant à son domaine de définition est définie par :

$$< f(x) >= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

1. Quelle est la dimension de $< f(x) >$?
2. Dessiner un graphe quelconque de $f(x)$ et mettre en évidence l'intégrale de f entre a et b.
3. Positionner l'ordonnée m telle que cette intégrale égale l'aire du rectangle de largeur $(b-a)$ et de hauteur m. Vous avez ainsi trouvé graphiquement une estimation de $< f(x) >$.
4. Calculer la valeur moyenne, entre a et b, de :
   $i)\ f(x) = x$ $\quad ii)\ f(x) = 2x$ $\quad iii)\ f(x) = x^2$
5. Calculer la valeur moyenne de $\cos x$ et de $\cos^2 x$ entre x_0 et $x_0 + 2\pi$
6. En déduire la valeur moyenne de $\sin x$ et de $\sin^2 x$ entre x_0 et $x_0 + 2\pi$

III : Calcul d'aires

1) Calculer l'aire comprise entre les courbes $f(x) = \sqrt{x},\ f(x) = x^2$ et les droites $x = 0$ et $x = 1$.

2) Calculer l'aire comprise entre les courbes isothermes $P(V) = \frac{RT_1}{V}$ et $P(V) = \frac{RT_2}{V}$ et les deux droites isochores (à volume constant) $V = V_a$ et $V = V_b$.
A.N. : $V_a = 1\ m^3$; $V_b = 2\ m^3$; $T_1 = 300\ K$; $T_2 = 400\ K$; $R = 8,31$ unités S.I..

IV : Intégrales indéfinies

Calculer les primitives suivantes en utilisant les différentes méthodes d'intégration connues :

1) $\int 3\sin\left(\frac{x}{2}\right) dx$ 2) $\int \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$ 3) $\int (3x^4 + 2x^3 + 1)\ dx$ 4) $\int \frac{e^x}{1+e^x} dx$

5) $\int e^{-2x+3} dx$ 6) $\int thx\ dx$ 7) $\int x\sqrt{1+x^2}\ dx$ 8) $\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} dx$ 9) $\int \frac{\cos x\ dx}{1+\sin x}$

11) $\int x \sin x\ dx$ 12) $\int x e^{1+x^2} dx$ 13) $\int \tan(2x+1)\ dx$ 14) $\int \ln x\ dx$ 15) $\int x \ln x\ dx$

16) $\int arccos(x)\ dx$ 17) $\int x\sqrt{1+x}\ dx$ $(poser x = 1 = t)$

V : Intégrales impropres ou intégrales généralisées

a) Les intégrales suivantes sont impropres ; expliqquer pourquoi ; puis donner leur nature c'est-à-dire trouver si elles sont convergentes ou divergentes :

1) $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2}$ 2) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x}$ 3) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ 4) $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$ 5) $\int_0^1 \ln x\ dx$ 6) $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$

b) Comparaison d'intégrales de fonctions continues positives à des intégrales de Riemann .

i) Montrer la convergence de $I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + \sqrt{x}}$, en étudiant d'abord la nature des deux intégrales de référence : $I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ et $I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$

(*)**ii)** Extension à $I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha + x^{\frac{1}{\alpha}}}$ où α est un réel positif quelconque.

(*)**iii)** Extension à $I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + (\alpha)\sqrt{x}}$ où α est un réel positif quelconque.

VI : Révision

Donner la dimension et l'unité S.I. de $\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial C(x,y,z,t)}{\partial t}\, dx$ et de $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial^2 C(x,y,z,t)}{\partial x^2}\, dx$ où les quantités $x,\ y,\ z$ sont chacune homogènes à une longueur, où t représente un temps et où $C(x,y,z,t)$ est la concentration d'une solution en g par litre.

Feuille 4 : Equations différentielles ordinaires d'ordre 1(EDO-1)

I : Equations à variables séparables (avs)

Dans ces exercices A-1 et A-2, y est une fonction réelle d'une variable réelle x, et y' est sa dérivée par rapport à x : $y' = \dfrac{dy}{dx}$. k et a sont des constantes réelles.

Exercice 1 :

Pour chacune des équations différentielles suivantes,
- Donner les solutions particulières "évidentes" (si vous en trouvez)
- Trouver la solution générale
- Dessiner le réseau des courbes solutions

a) $y' = -3$ b) $y' = -3y$ c) $y' = -3y^2$ d) $y' = k(a-y)$

e) $y' = y(1-y)$ (*)f) $y' = -y(1+y)$

Exercice 2 :

Résoudre les EDO-1 suivantes, compte tenu des conditions initiales éventuelles. (On pourra astucieusement recourir aux résultats de la feuille de TD 8) :

a) $y' = \dfrac{2(1+y^2)}{1+x}$ b) $y' = \dfrac{2(1+y^2)}{1+x}$ avec $y(0) = 1$ c) $y' = \dfrac{2(1+y^2)}{1-x}$ avec $y(2) = 0$

d) $y' = e^{-3y}\dfrac{cos(x)}{sin(x)}$ avec $y(\pi/2) = 0$

II : Applications des EDO-1avs

Exercice 1 : Application des exercices A.1-a,b,c :Réactions chimiques d'ordre 0, 1 ou 2

Soit une réaction chimique du type :

$$1)\ A \longrightarrow des\ produits \quad \text{ou} \quad 2)\ aA + bB \longrightarrow des\ produits$$

a et b sont les coefficients stoechiométriques et A et B les formules chimiques des deux réactifs (quand il y en a deux).
Lorsque la quantité de B est assez grande pour pouvoir être considérée comme constante malgré la réaction, la vitesse de réaction v est définie de la même manière pour ces deux réactions, par le taux de variation de la concentration $A(t)$ en réactif A, en fonction du temps t :

$$v(t) = -dA(t)/dt$$

Cette "vitesse" dépend de t de diverses façons ; on adopte la classification suivante :

$dA(t)/dt = -k_0$, modèle de "réaction chimique d'ordre 0"
$dA(t)/dt = -k_1 A(t)$, modèle de "réaction chimique d'ordre 1"
$dA(t)/dt = -k_2 A^2(t)$, modèle de "réaction chimique d'ordre 2"

1) Soit A_0 la concentration en réactif A au temps $t = 0$. Dans les 3 cas précédents, déterminer :
a) le signe de $A(t)$.
b) la dimension de la constante $k_i, i = 1,2,3$.
c) la pente de la tangente au graphe de $A(t)$ en $t = 0$
d) l'approximation affine de $A(t)$ au voisinage de $t = 0$
e) la solution de chacune de ces EDO-1.
f) le temps de demi-réaction appelé $t_{1/2}$ tel que $A(t_{1/2}) = A_0/2$

2) Représenter graphiquement ces 3 solutions en coordonnées cartésiennes orthogonales.

Exercice 2 : Autre réaction chimique

Lors d'une réaction $A + B \longrightarrow C$, l'association d'une molécule des deux réactifs forme le produit C. La loi d'action de masse assure que le taux de réaction est proportionnel au produit des concentrations de A et B ; les chimistes écrivent

$$\frac{d[C]}{dt} = k[A][B]$$

ce qu'on peut traduire par l'équation différentielle

$$y' = k(a-y)(b-y) \qquad \text{où} \;\; k, a, b \;\; \text{sont des constantes réelles}$$

1) Dans ce contexte chimique, quelles quantités représentent y, a, b ? Quel est leur signe ? Donner des solutions particulières évidentes.

2) Trouver l'expression de $y(t)$ dans le cas où b et a sont différents et $y(0) = 0$. Quelle est sa limite quand t temps vers l'infini ?

3) Même question que 2) si $a = b$.

Méthode du χ^2

1. On cherche à déterminer les coefficients d'une loi de la forme $y = ax^2 + b$ par la méthode du χ^2 (autrement dit par une méthode d'ajustement des mesures à partir des moindres carrés). On donne le tableau de mesures suivant :

mesure i	x_i	y_i
1	1	2
2	2	3
3	3	9
4	1	1
5	4	16

2. On cherche à déterminer les coefficients d'une loi de la forme $y = ax^b$ par la méthode du χ^2 (autrement dit par une méthode d'ajustement des mesures à partir des moindres carrés). On donne le tableau de mesures suivant :

mesure i	x_i	y_i
1	1	2
2	2	3
3	3	9
4	1	1
5	4	16

Université Paris Diderot - Paris 7 Année 2013-2014
SNV - L1 52U3MT12

Equations différentielles du premier ordre, compléments.

Exercice 1 Résoudre l'équation différentielle suivante.

$$y' - 3\frac{y}{x} = x, \qquad x \in]0, +\infty[\,,$$

avec la condition initiale $y(1) = 4$.

Exercice 2 Résoudre l'équation différentielle suivante.

$$y' + \frac{x}{1-x^2}y = 5\sqrt{1-x^2} \qquad x \in]-1, 1[\,,$$

avec la condition initiale $y(0) = -3$.

Exercice 3 Résoudre les équations différentielles de Bernoulli suivantes.

$$xy' = 2y + 4x^3\sqrt{y}. \tag{1}$$

$$y' = y^2 - 2y \tag{2}$$

$$y' = x^2y^2 + \frac{y}{x}. \tag{3}$$

$$y' = x^2(y+3)^3 - \frac{y+3}{x}. \tag{4}$$

$$y' = x^2(y-x)^2 + \frac{y}{x}. \tag{5}$$

$$y' = (y+x)(y+x-2) - 1. \tag{6}$$