ZÉRO-CYCLES SUR LES ESPACES HOMOGÈNES ET PROBLÈME DE GALOIS INVERSE

YONATAN HARPAZ ET OLIVIER WITTENBERG

Résumé. Soit X une compactification lisse d'un espace homogène d'un groupe algébrique linéaire G sur un corps de nombres k. Nous établissons la conjecture de Colliot-Thélène, Sansuc, Kato et Saito sur l'image du groupe de Chow des zéro-cycles de X dans le produit des mêmes groupes sur tous les complétés de k. Lorsque G est semi-simple et simplement connexe et que le stabilisateur géométrique est fini et hyper-résoluble, nous montrons que les points rationnels de X sont denses dans l'ensemble de Brauer–Manin. Pour les groupes finis hyper-résolubles, en particulier pour les groupes finis nilpotents, cela donne une nouvelle preuve du théorème de Shafarevich sur le problème de Galois inverse et résout en même temps, pour ces groupes, le problème de Grunwald.

1. Introduction

Les compactifications lisses d'espaces homogènes de groupes algébriques linéaires sont des variétés géométriquement unirationnelles, donc rationnellement connexes au sens de Campana, Kollár, Miyaoka et Mori (voir [Kol96, Chapter IV]). À ce titre, l'étude de leurs points rationnels est gouvernée, sur les corps de nombres, par la conjecture suivante de Colliot-Thélène [CT03] :

Conjecture 1.1. *Soit* X *une variété propre et lisse sur un corps de nombres* k*. Si* X *est rationnellement connexe, l'ensemble* $\mathrm{X}(k)$ *est dense dans* $\mathrm{X}(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}(\mathrm{X})}$.

On note ici $\mathrm{X}(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}(\mathrm{X})}$ l'ensemble de Brauer–Manin de X, un fermé de l'espace $\mathrm{X}(\mathbf{A}_k)$ des points adéliques de X, contenant $\mathrm{X}(k)$, défini par Manin [Man71] à l'aide du groupe de Brauer $\mathrm{Br}(\mathrm{X}) = \mathrm{H}^2_{\text{ét}}(\mathrm{X}, \mathbf{G}_\mathrm{m})$ et de la théorie du corps de classes local et global.

La conjecture 1.1 possède un analogue pour le groupe de Chow des zéro-cycles, dû à Colliot-Thélène, Sansuc, Kato et Saito (voir [CTS81, § 4], [KS86, § 7], [CT95, § 1], [HW16, Conjecture 1.2]), couramment dénommé conjecture (E). Dans le cas des variétés rationnellement connexes, celle-ci prend la forme suivante (compte tenu que l'on peut éviter les complétions grâce à [CT05, Proposition 11]) :

Conjecture 1.2. *Soit* X *une variété propre et lisse sur un corps de nombres* k*. Notons* Ω_f *l'ensemble des places finies de* k *et* Ω_∞ *celui de ses places infinies. Si* X *est rationnellement*

Date: 26 février 2018.

connexe, le complexe

$$\mathrm{CH}_0(\mathrm{X}) \to \prod_{v\in\Omega_f} \mathrm{CH}_0(\mathrm{X}_{k_v}) \times \prod_{v\in\Omega_\infty} \frac{\mathrm{CH}_0(\mathrm{X}_{k_v})}{\mathrm{N}_{\bar{k}_v/k_v}(\mathrm{CH}_0(\mathrm{X}_{\bar{k}_v}))} \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Br}(\mathrm{X}), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}), \tag{1.1}$$

où la seconde flèche est la somme des accouplements $\mathrm{CH}_0(\mathrm{X}_{k_v}) \times \mathrm{Br}(\mathrm{X}_{k_v}) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ *obtenus en composant les accouplements* [Man71, Définition 7] *à valeurs dans* $\mathrm{Br}(k_v)$ *avec l'invariant* $\mathrm{Br}(k_v) \hookrightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ *de la théorie du corps de classes local, est exact.*

À la suite des travaux de Legendre, Minkowski, Hasse, Châtelet, Eichler, Landherr, Kneser, Harder, Platonov, Chernousov, Voskresenskiĭ et Sansuc, la conjecture 1.1 fut établie par Borovoi [Bor96] pour toute variété X birationnellement équivalente à un espace homogène d'un groupe algébrique linéaire connexe soumis à l'une des deux hypothèses suivantes : soit le stabilisateur d'un point géométrique est connexe, soit il est fini et abélien et le groupe ambiant est semi-simple et simplement connexe. Liang [Lia13] en déduisit la validité de la conjecture 1.2 pour les mêmes variétés.

Récemment, Demarche et Lucchini Arteche [DLA17] (voir aussi [LA17b]) ont montré que le cas général de la conjecture 1.1 pour une variété X birationnellement équivalente à un espace homogène d'un groupe algébrique linéaire connexe se ramène à celui où le groupe ambiant est SL_n et où le stabilisateur d'un point géométrique est fini.

Ce cas particulier présente d'ailleurs un intérêt propre. On sait en effet, depuis Hilbert et Noether, que le problème de Galois inverse pour un groupe fini Γ, sur un corps de nombres fixé, est en réalité un problème sur l'arithmétique des variétés quotient $\mathbf{A}^m/\Gamma$ où Γ agit par permutation des coordonnées de $\mathbf{A}^m$ (une fois choisis un entier m et un plongement de Γ dans $\mathfrak{S}_m$; voir [Ser08, p. xiii]) ; ou, de façon équivalente, un problème sur l'arithmétique des espaces homogènes SL_n/Γ où Γ est vu comme un sous-groupe algébrique constant de SL_n (une fois choisis un entier n et un plongement de Γ dans $\mathrm{SL}_n(k)$; voir [CTS07, Corollary 3.11]). Ekedahl et Colliot-Thélène ont ainsi montré que l'existence d'une extension finie galoisienne de k de groupe de Galois isomorphe à Γ résulterait de la propriété dite d'approximation très faible pour la variété SL_n/Γ sur k (voir [Ser08, Theorem 3.5.7], [Har07, Proposition 1]). Cette propriété serait elle-même conséquence de la conjecture 1.1 pour une variété X propre, lisse et birationnellement équivalente à SL_n/Γ (voir [Har07, § 1.3]). Ainsi la conjecture 1.1 pour une telle variété X entraîne-t-elle une réponse positive au problème de Galois inverse pour Γ.

Sur tout corps de nombres k, Neukirch [Neu79, Corollary 2] a établi l'approximation faible pour SL_n/Γ (donc la conjecture 1.1 pour toute variété X propre, lisse et birationnellement équivalente à SL_n/Γ) lorsque Γ est un groupe fini constant résoluble d'ordre premier au nombre de racines de l'unité contenues dans k (ce qui exclut notamment les groupes d'ordre pair). Ce résultat s'étend aux groupes finis non constants et aux espaces homogènes dépourvus de point rationnel, à condition d'imposer une restriction similaire, forte, sur l'ordre du stabilisateur géométrique (voir [LA14]). Enfin, Harari [Har07] a vérifié la conjecture 1.1 pour les variétés X propres, lisses et birationnellement équivalentes à SL_n/Γ lorsque Γ est un groupe algébrique fini produit semi-direct itéré à noyaux abéliens.

Les deux théorèmes principaux de cet article sont les suivants.

Théorème A. *La conjecture 1.2 vaut, sur tout corps de nombres, pour toute variété propre et lisse birationnellement équivalente à un espace homogène d'un groupe algébrique linéaire.*

L'intérêt du théorème A est bien sûr l'absence de toute hypothèse sur le stabilisateur d'un point géométrique. Notant $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(\mathrm{V})$ le groupe de Brauer d'une compactification lisse d'un espace homogène V, il a pour corollaire immédiat, compte tenu du lemme de déplacement pour les zéro-cycles [CT05, p. 599], l'énoncé d'existence suivant :

Corollaire. *Soit k un corps de nombres. Soit* V *un espace homogène d'un groupe algébrique linéaire connexe sur k. Si $\mathrm{V}(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(\mathrm{V})} \neq \varnothing$, il existe un zéro-cycle de degré* 1 *sur* V.

Théorème B. *Soit* X *une variété propre, lisse et géométriquement irréductible sur un corps de nombres k. Si* X *est birationnellement équivalente à un espace homogène d'un groupe algébrique linéaire semi-simple simplement connexe, à stabilisateur géométrique fini hyper-résoluble (en tant que groupe fini muni d'une action extérieure du groupe de Galois absolu de k ; voir la définition 6.4 ci-dessous), alors $\mathrm{X}(k)$ est dense dans $\mathrm{X}(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}(\mathrm{X})}$.*

En particulier, la conjecture 1.1 vaut pour les variétés propres et lisses birationnellement équivalentes à SL_n/Γ avec Γ fini constant hyper-résoluble (par exemple, nilpotent).

Le théorème B implique une réponse positive au problème de Galois inverse pour les groupes finis hyper-résolubles, en particulier pour les groupes finis nilpotents, sur tout corps de nombres. Une réponse positive au problème de Galois inverse avait déjà été apportée par Shafarevich pour ces groupes, et plus généralement pour les groupes finis résolubles (voir [NSW08, Chapter IX, § 6] et les références qui y sont données). Cependant, le théorème B donne des informations significativement plus précises que la seule existence d'une extension finie galoisienne de k de groupe de Galois donné. Ainsi, par exemple, en le combinant avec les résultats récents de Lucchini Arteche [LA17a, § 6] sur le groupe de Brauer non ramifié des espaces homogènes, on obtient, compte tenu de [DLAN17, Proposition 2.4], une solution au « problème d'approximation modéré » de *op. cit.*, § 1.2, pour les groupes hyper-résolubles. Dans le cas des stabilisateurs constants, cela se traduit par l'énoncé suivant, auparavant inconnu même pour les groupes finis nilpotents :

Corollaire. *Soit Γ un groupe fini hyper-résoluble. Soit k un corps de nombres. Soit* S *un ensemble fini de places de k ne contenant aucune place finie divisant l'ordre de Γ. Pour chaque $v \in \mathrm{S}$, fixons une extension galoisienne K_v/k_v dont le groupe de Galois se plonge dans Γ. Il existe alors une extension finie galoisienne K/k de groupe de Galois Γ telle que pour chaque $v \in \mathrm{S}$, l'extension de k_v obtenue en complétant* K *en une place divisant v soit isomorphe à K_v/k_v.*

Ce corollaire, qui répond par l'affirmative au problème de Grunwald, pour les groupes finis hyper-résolubles, hors des places divisant l'ordre de Γ (voir [DLAN17]), ne semble pas accessible aux méthodes de Shafarevich.

Comme on le sait depuis Wang [Wan48], l'hypothèse portant sur S est essentielle à sa validité, même lorsque $\Gamma = \mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$, $k = \mathbf{Q}$, $\mathrm{S} = \{2\}$. D'autres exemples montrant que cette hypothèse est cruciale sont donnés dans [DLAN17, Theorem 1.2 et § 5].

Des informations plus fines sur le groupe de Brauer non ramifié d'un espace homogène donné permettent de déduire du théorème B des corollaires plus précis que celui que l'on vient d'énoncer. Par exemple, si $\Gamma = \mathrm{Q}_{2^m}$ est le groupe quaternionique d'ordre 2^m pour un entier $m \geq 1$, vu comme sous-groupe algébrique constant de SL_n une fois un plongement dans $\mathrm{SL}_n(k)$ choisi, Demarche [Dem10, Corollaire 3, Remarque 7] a démontré que le groupe de Brauer non ramifié de SL_n/Γ est réduit à $\mathrm{Br}(k)$. Le groupe Γ est un 2-groupe, donc est nilpotent, donc est hyper-résoluble ; il résulte donc du théorème B que la variété SL_n/Γ vérifie l'approximation faible. Autrement dit, le corollaire au théorème B reste vrai pour $\Gamma = \mathrm{Q}_{2^m}$ si l'on prend pour S un ensemble fini *quelconque* de places de k. Un tel énoncé était précédemment connu pour $m \leq 4$ seulement (voir [Dem10, Théorème 7, Remarque 13]).

Les résultats de Borovoi [Bor96] et Liang [Lia13] mentionnés plus haut ne prennent en compte que le sous-groupe *algébrique* du groupe de Brauer non ramifié de l'espace homogène en question, c'est-à-dire le sous-groupe constitué des classes annulées par une extension des scalaires. Sous les hypothèses de leurs théorèmes, tout le groupe de Brauer non ramifié est en fait algébrique, comme l'ont montré Bogomolov, Borovoi, Demarche et Harari (voir [Bog89], [BDH13] et les références données dans [Wit16, § 3.2.1]). Les théorèmes A et B, en revanche, prennent en compte les classes *transcendantes* (*i.e.* non algébriques) du groupe de Brauer non ramifié. En effet, dans la situation du théorème B, Saltman et Bogomolov ont établi dans les années 1980 que le groupe de Brauer de X peut contenir des éléments transcendants (voir [Sal84], [Bog87] ; en particulier X n'est pas géométriquement rationnelle en général) ; Demarche, Lucchini Arteche et Neftin [DLAN17] ont prouvé que ceux-ci jouent un rôle dans l'obstruction de Brauer–Manin pour de tels espaces homogènes.

Les démonstrations des théorèmes A et B reposent sur une observation simple concernant la géométrie des espaces homogènes de SL_n à stabilisateur géométrique Γ fini, à savoir : *les torseurs universels de leurs compactifications lisses* (au sens de la théorie de la descente de Colliot-Thélène et Sansuc [CTS87]) *contiennent chacun un ouvert fibré au-dessus d'un tore quasi-trivial en espaces homogènes de* SL_n *à stabilisateur géométrique le groupe dérivé* Γ'.

Lorsque Γ est résoluble, on voit apparaître là une structure géométrique inductive. C'est cette structure que nous exploitons dans l'article, à l'aide de deux ingrédients : la méthode des fibrations, qui vise à déduire un énoncé arithmétique, pour l'espace total d'une fibration, du même énoncé pour ses fibres et pour sa base, et la méthode de la descente, qui vise à déduire un énoncé arithmétique, pour une variété donnée, du même énoncé pour ses torseurs universels.

Dans le cadre des zéro-cycles, la méthode des fibrations est directement applicable sous la forme qui lui est donnée dans [HW16]. Dans le cadre des points rationnels, les résultats de [HW16] ne permettent d'appliquer la méthode des fibrations que de façon conditionnelle ; nous établissons dans le présent article des énoncés inconditionnels qui suffisent à traiter le cas des stabilisateurs hyper-résolubles et dont les preuves reposent notamment sur les travaux de Harari [Har94], [Har97]. Il nous est également nécessaire d'étendre la théorie de la descente de Colliot-Thélène et Sansuc afin de montrer que la conjecture 1.1 pour une variété propre, lisse et rationnellement connexe se déduit de la même conjecture pour les compactifications lisses de ses torseurs universels. Cet énoncé général ne résulte de [CTS87] que dans le cas où le groupe de Brauer de la variété considérée est constitué uniquement de classes algébriques (ce qui, d'après Saltman et Bogomolov, n'est pas le cas ici).

Il est à noter que même si l'espace homogène auquel on s'intéresse est SL_n/Γ pour un groupe Γ fini constant, les espaces homogènes qui apparaissent dans la fibration que l'on vient d'évoquer ne sont que des formes de SL_n/Γ' : ils ne possèdent pas nécessairement de point rationnel (et quand ils en possèdent, le stabilisateur n'est pas nécessairement un groupe constant). Même pour les seules applications au problème de Galois inverse, il est donc essentiel à la stratégie de la démonstration que le théorème B s'applique aussi aux espaces homogènes dépourvus de point rationnel.

Le texte est organisé comme suit. Le § 2 est consacré à la théorie de la descente sous un tore pour les variétés rationnellement connexes. Le § 3 compare la géométrie des torseurs universels d'une variété avec ceux d'un ouvert dense de la même variété et montre que les premiers contiennent des ouverts fibrés en les seconds au-dessus d'un tore quasi-trivial. Au § 4, nous discutons la méthode des fibrations pour les variétés fibrées en variétés lisses au-dessus d'un tore quasi-trivial. Nous nous tournons, au § 5, vers les revêtements étales des espaces homogènes de groupes algébriques linéaires connexes semi-simples et simplement connexes et identifions leurs torseurs universels. Enfin, les §§ 6 et 7 démontrent, respectivement, les théorèmes B et A.

Remerciements. Nous sommes reconnaissants à Cyril Demarche et Giancarlo Lucchini Arteche de nous avoir transmis une version préliminaire de leur article [DLA17], dont dépend le § 7.1 du présent article. Le premier auteur remercie l'Institut des Hautes Études Scientifiques pour son hospitalité pendant l'élaboration de ce travail.

Notations. Dans tout l'article, on désigne par $\overline{k}$ une clôture algébrique d'un corps k de caractéristique nulle. Les isomorphismes sont notés $\simeq$, les isomorphismes canoniques $=$. Tous les groupes de cohomologie sont des groupes de cohomologie galoisienne ou étale.

Un *tore* sur k est un groupe algébrique T tel que $\mathrm{T}_{\overline{k}} \simeq \mathbf{G}_{\mathrm{m},\overline{k}} \times \cdots \times \mathbf{G}_{\mathrm{m},\overline{k}}$. Il est *quasi-trivial* s'il existe une k-algèbre étale E telle que $\mathrm{T} \simeq \mathrm{R}_{\mathrm{E}/k}\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$, où $\mathrm{R}_{\mathrm{E}/k}$ désigne la restriction des scalaires à la Weil. Un *groupe de type multiplicatif* sur k (supposé de caractéristique nulle) est un groupe algébrique commutatif extension d'un groupe algébrique fini par un tore. Un *espace homogène* d'un groupe algébrique G sur k est une variété non vide V sur k munie d'une action de G telle que $\mathrm{G}(\overline{k})$ agisse transitivement sur $\mathrm{V}(\overline{k})$.

Nous employons une notation multiplicative pour le groupe $\mathrm{T}(\overline{k})$ (dont le neutre est 1), additive pour le groupe $\mathrm{Z}^1(k,\mathrm{T})$ des 1-cocycles continus de $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ à valeurs dans le module galoisien discret $\mathrm{T}(\overline{k})$ (le cocycle neutre est donc 0). On écrira $[\sigma] \in \mathrm{H}^1(k,\mathrm{T})$ pour désigner un élément de $\mathrm{H}^1(k,\mathrm{T})$ et en choisir un représentant $\sigma \in \mathrm{Z}^1(k,\mathrm{T})$. Si $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ est un torseur sous T, on notera $f^\sigma : \mathrm{Y}^\sigma \to \mathrm{X}$ le torseur sous T tordu de f par $\sigma \in \mathrm{Z}^1(k,\mathrm{T})$. Autrement dit, si Z désigne le torseur sous T sur $\mathrm{Spec}(k)$ déterminé par σ, alors $\mathrm{Y}^\sigma = \mathrm{Y} \times_k^{\mathrm{T}} \mathrm{Z}$ est le produit contracté de Y et de Z sous l'action de T. On renvoie à [Sko01, Chapter 2] pour toutes ces notions.

Lorsque X est une variété irréductible et lisse sur k, le *groupe de Brauer non ramifié* $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(\mathrm{X})$ est le groupe de Brauer de toute variété propre et lisse birationnellement équivalente à X. On pose $\mathrm{Br}_1(\mathrm{X}) = \mathrm{Ker}\big(\mathrm{Br}(\mathrm{X}) \to \mathrm{Br}(\mathrm{X}_{\overline{k}})\big)$ et $\mathrm{Br}_0(\mathrm{X}) = \mathrm{Im}\big(\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(\mathrm{X})\big)$ et l'on note $\overline{k}[\mathrm{X}]^*$ le groupe des fonctions inversibles sur $\mathrm{X}_{\overline{k}}$. Si X est propre, on dit que X est *rationnellement connexe* si $\mathrm{X}_{\overline{k}}$ est rationnellement connexe au sens de [Kol96, Chapter IV, Definition 3.2.2] ; c'est notamment le cas si $\mathrm{X}_{\overline{k}}$ est unirationnelle.

Lorsque k est un corps de nombres, on note Ω l'ensemble de ses places. Pour tout entier i et tout $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$-module discret M (ou tout groupe algébrique commutatif M sur k), on note $\text{Ш}^i(k,\mathrm{M}) = \mathrm{Ker}\big(\mathrm{H}^i(k,\mathrm{M}) \to \prod_{v\in\Omega} \mathrm{H}^i(k_v,\mathrm{M})\big)$. Une variété X sur k vérifie *l'approximation faible* si $\mathrm{X}(k)$ est dense dans $\prod_{v\in\Omega} \mathrm{X}(k_v)$ pour la topologie produit. (On ne suppose pas que $\mathrm{X}(k)$ est non vide.) Si X est propre et lisse sur k, on dit que X *vérifie la conjecture* (E) si le complexe [HW16, (1.2)] est exact ; lorsque X est rationnellement connexe, cela équivaut à l'exactitude du complexe (1.1) ci-dessus. Une partie H d'une variété irréductible X est un sous-ensemble *hilbertien* s'il existe un ouvert dense $\mathrm{X}^0 \subset \mathrm{X}$, un entier $n \geq 1$ et des X^0-schémas finis étales irréductibles $\mathrm{W}_1, \dots, \mathrm{W}_n$ tels que H soit l'ensemble des points de X^0 au-dessus desquels la fibre de W_i est irréductible pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

Enfin, une *action extérieure* d'un groupe profini Γ sur un groupe fini H est un morphisme de groupes continu $\Gamma \to \mathrm{Out}(\mathrm{H})$, où le groupe $\mathrm{Out}(\mathrm{H})$ des automorphismes extérieurs de H est muni de la topologie discrète.

2. Descente sous un tore et groupe de Brauer transcendant

2.1. **Énoncés.** Soit X une variété propre, lisse et rationnellement connexe, sur un corps de nombres k. La théorie de la descente de Colliot-Thélène et Sansuc [CTS87] affirme que pour tout torseur $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ sous un tore T sur k, on a une inclusion

$$\mathrm{X}(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}_1(\mathrm{X})} \subset \bigcup_{[\sigma]\in \mathrm{H}^1(k,\mathrm{T})} f^\sigma(\mathrm{Y}^\sigma(\mathbf{A}_k)) \tag{2.1}$$

de sous-ensembles de $\mathrm{X}(\mathbf{A}_k)$. Si f est un torseur universel, le groupe de Brauer non ramifié algébrique de Y^σ est réduit aux constantes pour tout σ (*op. cit.*, Théorème 2.1.2). Si de plus X est géométriquement rationnelle, on a $\mathrm{Br}(\mathrm{X}) = \mathrm{Br}_1(\mathrm{X})$ et $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(\mathrm{Y}^\sigma) = \mathrm{Br}_0(\mathrm{Y}^\sigma)$ pour tout σ, si bien que l'inclusion (2.1) ramène la conjecture 1.1 pour X à la même conjecture pour les compactifications lisses des variétés Y^σ. Si en revanche X est seulement supposée rationnellement connexe, le groupe de Brauer non ramifié de Y^σ peut contenir des classes transcendantes, auquel cas l'inclusion (2.1) ne permet plus une telle réduction. Le but du § 2 est de démontrer le théorème suivant, qui améliore (2.1) et rend possible la descente sur les variétés rationnellement connexes.

Théorème 2.1. *Soit* X *une variété lisse et géométriquement irréductible sur un corps de nombres k. Soit* T *un tore sur k. Soit $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ un torseur sous* T. *Notons* $\mathrm{A} \subset \mathrm{Br}(\mathrm{X})$ *l'image réciproque de* $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(\mathrm{Y}) \subset \mathrm{Br}(\mathrm{Y})$ *par* $f^* : \mathrm{Br}(\mathrm{X}) \to \mathrm{Br}(\mathrm{Y})$. *Alors*

$$\mathrm{X}(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{A}} \subset \bigcup_{[\sigma]\in \mathrm{H}^1(k,\mathrm{T})} f^\sigma\Big(\mathrm{Y}^\sigma(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(\mathrm{Y}^\sigma)}\Big). \tag{2.2}$$

Bien entendu, si X est propre, alors $\mathrm{A} = \mathrm{Br}(\mathrm{X}) = \mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(\mathrm{X})$.

Le théorème 2.1 peut aussi se déduire de travaux récents de Cao [Cao16, Theorem 5.9]. La démonstration que nous donnons ci-dessous fut obtenue indépendamment. D'autre part, on trouvera dans [CDX16, Theorem 1.2] et [Wei16, Theorem 1.7] des prédécesseurs du théorème 2.1, dans lesquels $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(\mathrm{Y}^\sigma)$ est remplacé par $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(\mathrm{Y}^\sigma) \cap \mathrm{Br}_1(\mathrm{Y}^\sigma)$.

Corollaire 2.2. *Soit* X *une variété propre, lisse et rationnellement connexe, sur un corps de nombres* k. *Soit* T *un tore sur* k. *Soit* $\mathrm{V} \subset \mathrm{X}$ *un ouvert dense. Soit* $f : \mathrm{W} \to \mathrm{V}$ *un torseur sous* T. *Alors* $\mathrm{X}(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}(\mathrm{X})}$ *est contenu dans l'adhérence de*

$$\bigcup_{[\sigma]\in \mathrm{H}^1(k,\mathrm{T})} f^\sigma\Big(\mathrm{W}^\sigma(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(\mathrm{W}^\sigma)}\Big)$$

dans $\mathrm{X}(\mathbf{A}_k)$.

Démonstration du corollaire 2.2. Appliquons le théorème 2.1 à V. Soit $\mathrm{A} \subset \mathrm{Br}(\mathrm{V})$ l'image réciproque de $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(\mathrm{W})$ par $f^* : \mathrm{Br}(\mathrm{V}) \to \mathrm{Br}(\mathrm{W})$. Choisissons une compactification lisse Y de W telle que f s'étende en un morphisme $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$. Les fibres de f au-dessus des points de codimension 1 de X contiennent toutes une composante irréductible de multiplicité 1 puisque $f \otimes_k \overline{k}$ admet une section rationnelle (en effet $\mathrm{H}^1(\overline{k}(\mathrm{V}), \mathrm{T}) = 0$ puisque $\mathrm{T}_{\overline{k}} \simeq \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^r$). Appliquant [CTS00, Lemma 3.1], on déduit que le groupe $\mathrm{A}/\mathrm{Br}(\mathrm{X})$ est fini. (Ce lemme affirme seulement la finitude de l'image de ce groupe dans $\mathrm{Br}(\mathrm{Y})/f^*\mathrm{Br}(\mathrm{X})$ mais la preuve donnée dans *loc. cit.* est en réalité une preuve de la finitude de $\mathrm{A}/\mathrm{Br}(\mathrm{X})$.) D'autre part, comme X est rationnellement connexe, le groupe $\mathrm{Br}(\mathrm{X})/\mathrm{Br}_0(\mathrm{X})$ est fini (voir [CTS13, Lemma 1.3]). Par conséquent, le groupe $\mathrm{A}/\mathrm{Br}_0(\mathrm{X})$ est fini. Il en résulte, par le "lemme formel" de Harari, que $\mathrm{X}(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}(\mathrm{X})}$ est contenu dans l'adhérence de $\mathrm{V}(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{A}}$ dans $\mathrm{X}(\mathbf{A}_k)$ (voir [CTS00, Proposition 1.1]). On conclut avec l'inclusion (2.2) pour V. $\square$

2.2. **Remarques préliminaires.** Dans le § 2.2, le corps k est un corps de caractéristique nulle quelconque et X, T, Y, f sont comme dans le théorème 2.1. La notation suivante sera utile : si $\mathrm{M} \to \mathrm{X}$ est un morphisme de variétés, on désignera par $\mathrm{Br}_1(\mathrm{M}/\mathrm{X})$ le sous-groupe de $\mathrm{Br}(\mathrm{M})$ constitué des classes dont l'image réciproque dans $\mathrm{Br}(\mathrm{M}_{\overline{k}})$ provient de $\mathrm{Br}(\mathrm{X}_{\overline{k}})$. Remarquons que $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(\mathrm{Y}^\sigma) \subset \mathrm{Br}_1(\mathrm{Y}^\sigma/\mathrm{X})$ puisque $\mathrm{Y}^\sigma_{\overline{k}}$ et $\mathrm{X}_{\overline{k}} \times \mathbf{P}^r_{\overline{k}}$ sont birationnellement équivalents au-dessus de $\mathrm{X}_{\overline{k}}$ pour $r = \dim(\mathrm{T})$.

Soit $\sigma \in \mathrm{Z}^1(k, \mathrm{T})$. Comme $f^\sigma : \mathrm{Y}^\sigma \to \mathrm{X}$ est un torseur sous T, on a une suite exacte

$$1 \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}} \to f^\sigma_*\mathbf{G}_{\mathrm{m}} \to \widehat{\mathrm{T}} \to 1 \tag{2.3}$$

de faisceaux étales sur X, où $\widehat{\mathrm{T}}$ désigne le groupe des caractères du tore T (voir [CTS87, Proposition 1.4.2]). D'autre part, on a $\mathrm{R}^1 f^\sigma_*\mathbf{G}_{\mathrm{m}} = 0$ puisque $\mathrm{Y}^\sigma \simeq \mathrm{X} \times \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^r$ localement sur X pour la topologie étale, et l'on a aussi $\mathrm{H}^1(\mathrm{X}_{\overline{k}}, \widehat{\mathrm{T}}) \simeq \mathrm{H}^1(\mathrm{X}_{\overline{k}}, \mathbf{Z}^r) = 0$. Il s'ensuit, au vu des suites spectrales de Leray pour f^σ et de Hochschild–Serre pour X, que $\mathrm{H}^2(\mathrm{X}, f^\sigma_*\mathbf{G}_{\mathrm{m}}) = \mathrm{Ker}\big(\mathrm{Br}(\mathrm{Y}^\sigma) \to \mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathrm{R}^2 f^\sigma_*\mathbf{G}_{\mathrm{m}})\big)$, $\mathrm{H}^2(\mathrm{X}_{\overline{k}}, f^\sigma_*\mathbf{G}_{\mathrm{m}}) = \mathrm{Ker}\big(\mathrm{Br}(\mathrm{Y}^\sigma_{\overline{k}}) \to \mathrm{H}^0(\mathrm{X}_{\overline{k}}, \mathrm{R}^2 f^\sigma_*\mathbf{G}_{\mathrm{m}})\big)$ et $\mathrm{Ker}\big(\mathrm{H}^2(\mathrm{X}, \widehat{\mathrm{T}}) \to \mathrm{H}^2(\mathrm{X}_{\overline{k}}, \widehat{\mathrm{T}})\big) = \mathrm{H}^2(k, \widehat{\mathrm{T}})$. Appliquant les foncteurs $\mathrm{H}^2(\mathrm{X}, -)$ et $\mathrm{H}^2(\mathrm{X}_{\overline{k}}, -)$ à (2.3), on déduit alors, compte tenu que $\mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathrm{R}^2 f^\sigma_*\mathbf{G}_{\mathrm{m}})$ s'injecte dans $\mathrm{H}^0(\mathrm{X}_{\overline{k}}, \mathrm{R}^2 f^\sigma_*\mathbf{G}_{\mathrm{m}})$, d'abord une identification entre le groupe $\mathrm{Br}_1(\mathrm{Y}^\sigma/\mathrm{X})$ et le noyau de l'application composée $\mathrm{H}^2(\mathrm{X}, f^\sigma_*\mathbf{G}_\mathrm{m}) \to \mathrm{H}^2(\mathrm{X}_{\bar{k}}, f^\sigma_*\mathbf{G}_\mathrm{m}) \to \mathrm{H}^2(\mathrm{X}_{\bar{k}}, \widehat{\mathrm{T}})$, puis une suite exacte

$$\mathrm{Br}(\mathrm{X}) \xrightarrow{(f^\sigma)^*} \mathrm{Br}_1(\mathrm{Y}^\sigma/\mathrm{X}) \xrightarrow{\varphi^\sigma} \mathrm{H}^2(k, \widehat{\mathrm{T}}) \xrightarrow{\delta} \mathrm{H}^3(\mathrm{X}, \mathbf{G}_\mathrm{m}). \tag{2.4}$$

Proposition 2.3. *Notant comme ci-dessus σ un élément de $\mathrm{Z}^1(k, \mathrm{T})$, on a :*
(i) Si $\mathrm{H}^3(k, \mathbf{G}_\mathrm{m}) = 0$, l'application δ ne dépend pas de σ.
(ii) Si $\mathrm{H}^3(k, \mathbf{G}_\mathrm{m}) = 0$, l'image de $\mathrm{Br}_\mathrm{nr}(\mathrm{Y}^\sigma)$ par φ^σ ne dépend pas de σ.
(iii) L'image réciproque de $\mathrm{Br}_\mathrm{nr}(\mathrm{Y}^\sigma)$ par $(f^\sigma)^*$ ne dépend pas de σ, i.e. *est égale à* A.
(iv) Pour $y \in \mathrm{Y}^\sigma(k)$, $t \in \mathrm{T}(k)$ et $\alpha^\sigma \in \mathrm{Br}_1(\mathrm{Y}^\sigma/\mathrm{X})$, on a $\alpha^\sigma(t \cdot y) = \alpha^\sigma(y) + (\varphi^\sigma(\alpha^\sigma) \smile t)$.

Démonstration. Pour $x \in \mathrm{H}^2(k, \widehat{\mathrm{T}})$, on a $\delta(x) = p^*x \smile [f^\sigma]$ si $p : \mathrm{X} \to \mathrm{Spec}(k)$ désigne le morphisme structural et $[f^\sigma] \in \mathrm{H}^1(\mathrm{X}, \mathrm{T})$ la classe de f^σ (voir [CTS87, Proposition 1.4.3]). Comme $[f^\sigma] = [f] + p^*[\sigma]$ et comme $x \smile [\sigma] \in \mathrm{H}^3(k, \mathbf{G}_\mathrm{m})$, l'assertion (i) s'ensuit.

L'assertion (iv) résulte du lemme ci-dessous appliqué à $\mathrm{Z} = (f^\sigma)^{-1}(f^\sigma(y))$.

Lemme 2.4. *Soit* Z *un torseur sous* T*, sur k. Soient $z \in \mathrm{Z}(k)$, $t \in \mathrm{T}(k)$, $\alpha \in \mathrm{Br}_1(\mathrm{Z})$. On a $\alpha(t \cdot z) = \alpha(z) + (\varphi(\alpha) \smile t)$, où $\varphi : \mathrm{Br}_1(\mathrm{Z}) \to \mathrm{H}^2(k, \widehat{\mathrm{T}})$ désigne l'application induite par la suite exacte $1 \to \bar{k}^* \to \bar{k}[\mathrm{Z}]^* \to \widehat{\mathrm{T}} \to 1$ et par l'isomorphisme $\mathrm{Br}_1(\mathrm{Z}) = \mathrm{H}^2(k, \bar{k}[\mathrm{Z}]^*)$ issu de la suite spectrale de Hochschild–Serre. De plus φ est surjective si $\mathrm{H}^3(k, \mathbf{G}_\mathrm{m}) = 0$.*

Démonstration. L'application $\mathrm{Br}_1(\mathrm{Z}) \to \mathrm{Br}(k)$, $\alpha \mapsto \alpha(t \cdot z) - \alpha(z)$ est celle induite, via l'isomorphisme $\mathrm{Br}_1(\mathrm{Z}) = \mathrm{H}^2(k, \bar{k}[\mathrm{Z}]^*)$, par l'application $\bar{k}[\mathrm{Z}]^* \to \bar{k}^*$, $a \mapsto a(t \cdot z)/a(z)$. Cette dernière se factorise par $\widehat{\mathrm{T}}$. Par le lemme de Rosenlicht [Ros57, Proposition 3], la flèche $\widehat{\mathrm{T}} \to \bar{k}^*$ qui en résulte est $t \in \mathrm{T}(k) = \mathrm{Hom}(\widehat{\mathrm{T}}, \mathbf{G}_\mathrm{m})$; d'où $\alpha(t \cdot z) = \alpha(z) + (\varphi(\alpha) \smile t)$. ☐

Pour établir (ii), fixons $\sigma, \sigma' \in \mathrm{Z}^1(k, \mathrm{T})$ et montrons que $\varphi^\sigma(\mathrm{Br}_\mathrm{nr}(\mathrm{Y}^\sigma)) \subset \varphi^{\sigma'}(\mathrm{Br}_\mathrm{nr}(\mathrm{Y}^{\sigma'}))$. Quitte à remplacer f par $f^{-\sigma'}$ et σ par $\sigma - \sigma'$, on peut supposer que $\sigma' = 0$.

Notons Z le torseur sous T, sur k, déterminé par σ. Notons $\pi : \mathrm{Y} \times_k \mathrm{Z} \to \mathrm{Y}^\sigma$ l'application canonique. Notons $\mathrm{pr}_1 : \mathrm{Y} \times_k \mathrm{Z} \to \mathrm{Y}$, $\mathrm{pr}_2 : \mathrm{Y} \times_k \mathrm{Z} \to \mathrm{Z}$, $g : \mathrm{X} \times_k \mathrm{Z} \to \mathrm{X}$ les projections et posons $h = f \circ \mathrm{pr}_1 : \mathrm{Y} \times_k \mathrm{Z} \to \mathrm{X}$.

Soit $\alpha^\sigma \in \mathrm{Br}_\mathrm{nr}(\mathrm{Y}^\sigma)$. Comme $\mathrm{H}^3(k, \mathbf{G}_\mathrm{m}) = 0$, l'application φ du lemme 2.4 est surjective : il existe $\alpha \in \mathrm{Br}_1(\mathrm{Z})$ tel que $\varphi(\alpha) = \varphi^\sigma(\alpha^\sigma)$. D'après la proposition 2.3 (i), les applications φ^0 et φ^σ ont la même image : il existe donc $\alpha^0 \in \mathrm{Br}_1(\mathrm{Y}/\mathrm{X})$ tel que $\varphi^0(\alpha^0) = \varphi^\sigma(\alpha^\sigma)$. Notons $\alpha^0 \boxplus \alpha = \mathrm{pr}_1^*\alpha^0 + \mathrm{pr}_2^*\alpha \in \mathrm{Br}_1(\mathrm{Y} \times_k \mathrm{Z})$. Voyons respectivement α^σ, α^0, α, $\alpha^0 \boxplus \alpha$ comme des éléments de $\mathrm{H}^2(\mathrm{X}, f^\sigma_*\mathbf{G}_\mathrm{m})$, $\mathrm{H}^2(\mathrm{X}, f_*\mathbf{G}_\mathrm{m})$, $\mathrm{H}^2(\mathrm{X}, g_*\mathbf{G}_\mathrm{m})$, $\mathrm{H}^2(\mathrm{X}, h_*\mathbf{G}_\mathrm{m})$. Le diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mathbf{G}_\mathrm{m} \arrow[r] \arrow[d, equal] & f^\sigma_*\mathbf{G}_\mathrm{m} \arrow[r] \arrow[d, "\pi^*"] & \widehat{\mathrm{T}} \arrow[r] \arrow[d, "\Delta"] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathbf{G}_\mathrm{m} \arrow[r] & h_*\mathbf{G}_\mathrm{m} \arrow[r] & \widehat{\mathrm{T}} \oplus \widehat{\mathrm{T}} \arrow[r] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathbf{G}_\mathrm{m} \oplus \mathbf{G}_\mathrm{m} \arrow[r] \arrow[u, "\Pi"] & f_*\mathbf{G}_\mathrm{m} \oplus g_*\mathbf{G}_\mathrm{m} \arrow[r] \arrow[u] & \widehat{\mathrm{T}} \oplus \widehat{\mathrm{T}} \arrow[r] \arrow[u, equal] & 1
\end{tikzcd}$$

montre l'existence de $\beta \in \mathrm{Br}(\mathrm{X})$ tel que $\alpha^0 \boxplus \alpha = \pi^*\alpha^\sigma + h^*\beta$ dans $\mathrm{Br}_1(\mathrm{Y} \times_k \mathrm{Z}/\mathrm{X})$. Quitte à remplacer α^0 par $\alpha^0 + f^*\beta$, on peut supposer que $\alpha^0 \boxplus \alpha = \pi^*\alpha^\sigma$. Comme $\alpha^\sigma \in \mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(\mathrm{Y}^\sigma)$, il s'ensuit que $\alpha^0 \boxplus \alpha \in \mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(\mathrm{Y} \times_k \mathrm{Z})$, puis que $\alpha^0 \in \mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(\mathrm{Y})$. Comme $\varphi^\sigma(\alpha^\sigma) = \varphi^0(\alpha^0)$, on a maintenant montré que $\varphi^\sigma(\alpha^\sigma) \in \varphi^0(\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(\mathrm{Y}))$, ce qui conclut la preuve de (ii).

Vérifions (iii). Soit $\beta \in \mathrm{Br}(\mathrm{X})$. Soit K le corps des fonctions du torseur sous T, sur k, déterminé par $\sigma \in \mathrm{Z}^1(k, \mathrm{T})$. Vu l'isomorphisme canonique $\mathrm{Y} \otimes_k \mathrm{K} = \mathrm{Y}^\sigma \otimes_k \mathrm{K}$ de schémas sur $\mathrm{X} \otimes_k \mathrm{K}$, on a $(f^*\beta) \otimes_k \mathrm{K} \in \mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(\mathrm{Y} \otimes_k \mathrm{K})$ si et seulement si $((f^\sigma)^*\beta) \otimes_k \mathrm{K} \in \mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(\mathrm{Y}^\sigma \otimes_k \mathrm{K})$. Par ailleurs, un élément de $\mathrm{Br}(\mathrm{Y})$ appartient à $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(\mathrm{Y})$ si et seulement si son image dans $\mathrm{Br}(\mathrm{Y} \otimes_k \mathrm{K})$ appartient à $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(\mathrm{Y} \otimes_k \mathrm{K})$, puisque l'extension K/k est régulière ; et de même pour Y^σ. Donc $f^*\beta \in \mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(\mathrm{Y})$ si et seulement si $(f^\sigma)^*\beta \in \mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(\mathrm{Y}^\sigma)$. ☐

2.3. **Preuve du théorème 2.1.** Fixons $(x_v)_{v\in\Omega} \in \mathrm{X}(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{A}}$ et exhibons $\sigma \in \mathrm{Z}^1(k, \mathrm{T})$ tel que $(x_v)_{v\in\Omega} \in f^\sigma\Big(\mathrm{Y}^\sigma(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(\mathrm{Y}^\sigma)}\Big)$. Commençons par exploiter l'orthogonalité à $\mathrm{A} \cap \mathrm{Br}_1(\mathrm{X})$ à l'aide de la théorie de la descente de Colliot-Thélène et Sansuc sous sa forme classique :

Proposition 2.5. *Il existe* $\sigma \in \mathrm{Z}^1(k, \mathrm{T})$ *tel que* $(x_v)_{v\in\Omega} \in f^\sigma(\mathrm{Y}^\sigma(\mathbf{A}_k))$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer [Sko01, Theorem 4.1.1, Theorem 6.1.2], lorsque X est propre, ou [HS13, Theorem 8.4, Proposition 8.12], en général, puisque les cup-produits d'un élément de $\mathrm{H}^1(k, \widehat{\mathrm{T}})$ par $[f] \in \mathrm{H}^1(\mathrm{X}, \mathrm{T})$ appartiennent à $\mathrm{Ker}(f^*)$ donc à A. ☐

Remplacer f par f^σ ne modifie pas le groupe A, d'après la proposition 2.3 (iii), et est donc loisible en vue d'établir le théorème. La proposition 2.5 permet ainsi de supposer que $(x_v)_{v\in\Omega} \in f(\mathrm{Y}(\mathbf{A}_k))$. On a alors $(x_v)_{v\in\Omega} \in f^\sigma(\mathrm{Y}^\sigma(\mathbf{A}_k))$ pour tout σ tel que $[\sigma] \in Ш^1(k, \mathrm{T})$. Pour tout tel σ, considérons l'application

$$\varepsilon_\sigma : Ш^2(k, \widehat{\mathrm{T}}) \cap \varphi^0(\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(\mathrm{Y})) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

définie par $\varepsilon_\sigma(\alpha') = \sum_{v\in\Omega} \mathrm{inv}_v\, \alpha^\sigma(y_v)$ pour un $\alpha^\sigma \in \mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(\mathrm{Y}^\sigma)$ tel que $\alpha' = \varphi^\sigma(\alpha^\sigma)$ et un relèvement $(y_v)_{v\in\Omega} \in \mathrm{Y}^\sigma(\mathbf{A}_k)$ de $(x_v)_{v\in\Omega}$. L'existence de α^σ est assurée par la proposition 2.3 (ii). Que la somme $\sum_{v\in\Omega} \mathrm{inv}_v\, \alpha^\sigma(y_v)$ ne dépende pas du choix de $(y_v)_{v\in\Omega}$ résulte de la proposition 2.3 (iv), compte tenu que $\alpha' \in Ш^2(k, \widehat{\mathrm{T}})$. Qu'elle ne dépende pas du choix de α^σ vient de l'hypothèse que $(x_v)_{v\in\Omega} \in \mathrm{X}(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{A}}$ et de la proposition 2.3 (iii).

Proposition 2.6. *On a* $\varepsilon_\sigma(\alpha') = \varepsilon_0(\alpha') - \langle \alpha', [\sigma] \rangle$ *pour tout* $\alpha' \in Ш^2(k, \widehat{\mathrm{T}}) \cap \varphi^0(\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(\mathrm{Y}))$ *et tout* $\sigma \in \mathrm{Z}^1(k, \mathrm{T})$ *tel que* $[\sigma] \in Ш^1(k, \mathrm{T})$, *où* $\langle -, - \rangle : Ш^2(k, \widehat{\mathrm{T}}) \times Ш^1(k, \mathrm{T}) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ *désigne l'accouplement de Poitou–Tate (voir* [San81, Rappels 8.2] *pour sa définition).*

Démonstration. Soit $\alpha^\sigma \in \mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(\mathrm{Y}^\sigma)$ tel que $\alpha' = \varphi^\sigma(\alpha^\sigma)$. Comme on a vu dans la preuve de la proposition 2.3 (ii), dont on reprend les notations Z, φ, π, il existe $\alpha^0 \in \mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(\mathrm{Y})$ et $\alpha \in \mathrm{Br}_1(\mathrm{Z})$ tels que $\alpha' = \varphi^0(\alpha^0) = \varphi(\alpha)$ et que $\alpha^0 \boxplus \alpha = \pi^*\alpha^\sigma$ dans $\mathrm{Br}(\mathrm{Y} \times_k \mathrm{Z})$. Fixons $(z_v)_{v\in\Omega} \in \mathrm{Z}(\mathbf{A}_k)$. Pour $(y_v)_{v\in\Omega} \in \mathrm{Y}(\mathbf{A}_k)$ relevant $(x_v)_{v\in\Omega}$, on a

$$\begin{aligned}\varepsilon_\sigma(\alpha') &= \sum_{v\in\Omega} \mathrm{inv}_v(\pi^*\alpha^\sigma)(y_v \times z_v) = \sum_{v\in\Omega} \mathrm{inv}_v(\alpha^0 \boxplus \alpha)(y_v \times z_v) \\ &= \sum_{v\in\Omega} \mathrm{inv}_v\, \alpha^0(y_v) + \sum_{v\in\Omega} \mathrm{inv}_v\, \alpha(z_v) = \varepsilon_0(\alpha') - \langle \alpha', [\sigma] \rangle,\end{aligned}$$

où la dernière égalité vient de [San81, Lemme 8.4]. □

L'application ε_0 se prolonge en un homomorphisme $Ш^2(k, \widehat{\mathrm{T}}) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. L'accouplement de Poitou–Tate étant parfait (voir [NSW08, Theorem 8.6.7]), il existe $[\sigma] \in Ш^1(k, \mathrm{T})$ tel que $\varepsilon_0(\alpha') = \langle \alpha', [\sigma] \rangle$ pour tout $\alpha' \in Ш^2(k, \widehat{\mathrm{T}}) \cap \varphi^0(\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(\mathrm{Y}))$. D'après la proposition 2.6, on a alors $\varepsilon_\sigma = 0$. Quitte à remplacer f par f^σ, on peut donc supposer que $\varepsilon_0 = 0$. La proposition suivante conclut maintenant la preuve du théorème.

Proposition 2.7. *Si $\varepsilon_0 = 0$, alors $(x_v)_{v\in\Omega} \in f\big(\mathrm{Y}(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(\mathrm{Y})}\big)$.*

Démonstration. Fixons $(y_v)_{v\in\Omega} \in \mathrm{Y}(\mathbf{A}_k)$ relevant $(x_v)_{v\in\Omega}$. L'application $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(\mathrm{Y}) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, $\alpha^0 \mapsto \sum_{v\in\Omega} \mathrm{inv}_v\, \alpha^0(y_v)$ s'annule sur le noyau de la flèche $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(\mathrm{Y}) \to \mathrm{H}^2(k, \widehat{\mathrm{T}})/Ш^2(k, \widehat{\mathrm{T}})$ induite par φ^0, puisque $\varepsilon_0 = 0$. Comme $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ est un $\mathbf{Z}$-module injectif, elle se factorise donc par $\mathrm{H}^2(k, \widehat{\mathrm{T}})/Ш^2(k, \widehat{\mathrm{T}})$. Il s'ensuit, compte tenu de la suite exacte

$$\mathrm{T}(\mathbf{A}_k) \longrightarrow \mathrm{Hom}\big(\mathrm{H}^2(k, \widehat{\mathrm{T}}), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}\big) \longrightarrow \mathrm{Hom}\big(Ш^2(k, \widehat{\mathrm{T}}), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}\big)$$

établie dans [Har08, Théorème 2], qu'il existe $(t_v)_{v\in\Omega} \in \mathrm{T}(\mathbf{A}_k)$ tel que $\sum_{v\in\Omega} \mathrm{inv}_v\, \alpha^0(y_v) = \sum_{v\in\Omega} \mathrm{inv}_v(\varphi^0(\alpha^0) \smile t_v)$ pour tout $\alpha^0 \in \mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(\mathrm{Y})$. On a alors $(t_v^{-1} \cdot y_v)_{v\in\Omega} \in \mathrm{Y}(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(\mathrm{Y})}$ d'après la proposition 2.3 (iv) ; de plus, ce point adélique relève encore $(x_v)_{v\in\Omega}$. □

3. D'un torseur universel à l'autre

La théorie de la descente, originellement développée pour des variétés propres, a depuis été utilement appliquée, dans le cadre de l'étude des points rationnels, à des variétés ouvertes (voir [CTS00], [HBS02], [CT03], [CTHS03], [DSW15]). Étant donnés une variété X propre, lisse et rationnellement connexe et un ouvert $\mathrm{V} \subset \mathrm{X}$ tel que $\overline{k}[\mathrm{V}]^* = \overline{k}^*$, la question se pose naturellement de comparer la descente appliquée à X avec la descente appliquée à V, donc les torseurs universels de X avec ceux de V. C'est à cette question que ce paragraphe est consacré, dans le cadre légèrement plus général des torseurs de type quelconque sous un groupe de type multiplicatif, sans supposer X propre.

Fixons, jusqu'à la fin du § 3, un corps k de caractéristique nulle, une clôture algébrique $\overline{k}$ de k, une variété X lisse et géométriquement irréductible sur k, un ouvert dense $\mathrm{V} \subset \mathrm{X}$ tel que $\overline{k}[\mathrm{V}]^* = \overline{k}^*$, un groupe abélien de type fini $\widehat{\mathrm{R}}$ muni d'une action continue de $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ et un homomorphisme $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$-équivariant $\lambda : \widehat{\mathrm{R}} \to \mathrm{Pic}(\mathrm{V}_{\overline{k}})$.

Définissons des $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$-modules discrets $\widehat{\mathrm{T}}$ et $\widehat{\mathrm{Q}}$ et un homomorphisme $\nu : \widehat{\mathrm{T}} \to \mathrm{Pic}(\mathrm{X}_{\overline{k}})$ par le diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \widehat{\mathrm{Q}} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \widehat{\mathrm{T}} \arrow[r] \arrow[d, "\nu"] & \widehat{\mathrm{R}} \arrow[r] \arrow[d, "\lambda"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Div}_{\mathrm{X}_{\overline{k}} \setminus \mathrm{V}_{\overline{k}}}(\mathrm{X}_{\overline{k}}) \arrow[r] & \mathrm{Pic}(\mathrm{X}_{\overline{k}}) \arrow[r] & \mathrm{Pic}(\mathrm{V}_{\overline{k}}) \arrow[r] & 0, \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

où $\mathrm{Div}_{\mathrm{X}_{\overline{k}} \setminus \mathrm{V}_{\overline{k}}}(\mathrm{X}_{\overline{k}})$ désigne le groupe des diviseurs sur $\mathrm{X}_{\overline{k}}$ supportés par $\mathrm{X}_{\overline{k}} \setminus \mathrm{V}_{\overline{k}}$; ainsi $\widehat{\mathrm{T}}$ est par définition le produit fibré de $\widehat{\mathrm{R}}$ par $\mathrm{Pic}(\mathrm{X}_{\overline{k}})$ au-dessus de $\mathrm{Pic}(\mathrm{V}_{\overline{k}})$. Comme le groupe

$\widehat{\mathrm{Q}} = \mathrm{Div}_{\mathrm{X}_{\overline{k}} \setminus \mathrm{V}_{\overline{k}}}(\mathrm{X}_{\overline{k}})$ admet une base sur $\mathbf{Z}$ permutée par $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$, il donne naissance à un tore quasi-trivial $\mathrm{Q} = \mathscr{H}\!om(\widehat{\mathrm{Q}}, \mathbf{G}_{\mathrm{m}})$ sur k. Posant $\mathrm{R} = \mathscr{H}\!om(\widehat{\mathrm{R}}, \mathbf{G}_{\mathrm{m}})$ et $\mathrm{T} = \mathscr{H}\!om(\widehat{\mathrm{T}}, \mathbf{G}_{\mathrm{m}})$, on a une suite exacte de groupes de type multiplicatif sur k :

$$1 \longrightarrow \mathrm{R} \longrightarrow \mathrm{T} \longrightarrow \mathrm{Q} \longrightarrow 1. \tag{3.2}$$

Rappelons que le *type* d'un torseur $g : \mathrm{Z} \to \mathrm{V}$ sous R est la classe d'isomorphisme du torseur $g_{\overline{k}} : \mathrm{Z}_{\overline{k}} \to \mathrm{V}_{\overline{k}}$ sous $\mathrm{R}_{\overline{k}}$. C'est un élément $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$-invariant de $\mathrm{H}^1(\mathrm{V}_{\overline{k}}, \mathrm{R}_{\overline{k}})$. De façon équivalente et conformément à la définition de [CTS87, § 2.0], l'isomorphisme canonique

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{V}_{\overline{k}}, \mathrm{R}_{\overline{k}}) = \mathrm{H}^1(\mathrm{V}_{\overline{k}}, \mathscr{H}\!om(\widehat{\mathrm{R}}, \mathbf{G}_{\mathrm{m}})) = \mathrm{Hom}(\widehat{\mathrm{R}}, \mathrm{H}^1(\mathrm{V}_{\overline{k}}, \mathbf{G}_{\mathrm{m},\overline{k}})) = \mathrm{Hom}(\widehat{\mathrm{R}}, \mathrm{Pic}(\mathrm{V}_{\overline{k}})) \tag{3.3}$$

(où l'isomorphisme du milieu résulte, dans le cas où $\widehat{\mathrm{R}} = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, de l'hypothèse $\overline{k}[\mathrm{V}]^* = \overline{k}^*$) applique le type de g sur l'homomorphisme $\widehat{\mathrm{R}} \to \mathrm{Pic}(\mathrm{V}_{\overline{k}})$ qui à $\chi \in \widehat{\mathrm{R}} = \mathrm{Hom}(\mathrm{R}_{\overline{k}}, \mathbf{G}_{\mathrm{m},\overline{k}})$ associe l'image de la classe de $g_{\overline{k}}$ par $\chi_* : \mathrm{H}^1(\mathrm{V}_{\overline{k}}, \mathrm{R}_{\overline{k}}) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{V}_{\overline{k}}, \mathbf{G}_{\mathrm{m},\overline{k}}) = \mathrm{Pic}(\mathrm{V}_{\overline{k}})$.

La partie (ii) de la proposition suivante constitue l'énoncé principal du § 3.

Proposition 3.1. *Soit* $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ *un torseur sous* T*, de type* ν*. Soit* $\mathrm{W} = f^{-1}(\mathrm{V})$*.*

(i) Le torseur $\mathrm{W}/\mathrm{R} \to \mathrm{V}$ *sous* Q *est trivial. Autrement dit, il existe un* V*-isomorphisme* Q*-équivariant* $\mathrm{W}/\mathrm{R} \simeq \mathrm{V} \times_k \mathrm{Q}$*.*

Fixons un tel isomorphisme et notons $\pi : \mathrm{W} \to \mathrm{Q}$ *le morphisme* T*-équivariant obtenu en le composant avec le morphisme quotient* $\mathrm{W} \to \mathrm{W}/\mathrm{R}$ *et la seconde projection* $\mathrm{V} \times_k \mathrm{Q} \to \mathrm{Q}$*.*

(ii) Pour $q \in \mathrm{Q}(k)$*, l'action naturelle de* R *sur* $\mathrm{W}_q = \pi^{-1}(q)$ *fait du morphisme* $\mathrm{W}_q \to \mathrm{V}$ *induit par* f *un torseur, sous* R*, de type* λ*.*

(iii) Les classes d'isomorphisme de torseurs $\mathrm{V}' \to \mathrm{V}$ *sous* R*, de type* λ*, tels que le produit contracté* $\mathrm{V}' \times_k^{\mathrm{R}} \mathrm{T} \to \mathrm{V}$ *soit isomorphe, en tant que torseur sous* T*, à* $\mathrm{W} \to \mathrm{V}$*, sont exactement les classes d'isomorphisme des torseurs* $\mathrm{W}_q \to \mathrm{V}$ *pour* $q \in \mathrm{Q}(k)$*.*

Démonstration. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{H}^1(\mathrm{X}, \mathrm{T}) \arrow[d] \arrow[dr] & & \\
 & \mathrm{H}^1(\mathrm{X}_{\overline{k}}, \mathrm{T}_{\overline{k}}) \arrow[dr, "\rho"] & \mathrm{H}^1(\mathrm{V}, \mathrm{T}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^1(\mathrm{V}, \mathrm{Q}) \arrow[d, hook] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{H}^1(\mathrm{V}_{\overline{k}}, \mathrm{R}_{\overline{k}}) \arrow[r, "\iota"] & \mathrm{H}^1(\mathrm{V}_{\overline{k}}, \mathrm{T}_{\overline{k}}) \arrow[r] & \mathrm{H}^1(\mathrm{V}_{\overline{k}}, \mathrm{Q}_{\overline{k}}),
\end{tikzcd} \tag{3.4}$$

dont la ligne du bas est exacte puisque $\overline{k}[\mathrm{V}]^* = \overline{k}^*$. La flèche verticale de droite est injective car son noyau est $\mathrm{H}^1(k, \mathrm{Q})$, qui est nul d'après le théorème de Hilbert 90 puisque Q est un tore quasi-trivial. Voyant λ et ν comme des éléments de $\mathrm{H}^1(\mathrm{V}_{\overline{k}}, \mathrm{R}_{\overline{k}})$ et de $\mathrm{H}^1(\mathrm{X}_{\overline{k}}, \mathrm{T}_{\overline{k}})$, on constate, en comparant la définition de ν (voir le diagramme (3.1)) avec les trois isomorphismes canoniques $\mathrm{H}^1(\mathrm{X}_{\overline{k}}, \mathrm{T}_{\overline{k}}) = \mathrm{Hom}(\widehat{\mathrm{T}}, \mathrm{Pic}(\mathrm{X}_{\overline{k}}))$, $\mathrm{H}^1(\mathrm{V}_{\overline{k}}, \mathrm{T}_{\overline{k}}) = \mathrm{Hom}(\widehat{\mathrm{T}}, \mathrm{Pic}(\mathrm{V}_{\overline{k}}))$, $\mathrm{H}^1(\mathrm{V}_{\overline{k}}, \mathrm{R}_{\overline{k}}) = \mathrm{Hom}(\widehat{\mathrm{R}}, \mathrm{Pic}(\mathrm{V}_{\overline{k}}))$ (voir (3.3)), que

$$\rho(\nu) = \iota(\lambda). \tag{3.5}$$

Comme $[f] \in \mathrm{H}^1(\mathrm{X}, \mathrm{T})$ s'envoie sur $\nu \in \mathrm{H}^1(\mathrm{X}_{\bar{k}}, \mathrm{T}_{\bar{k}})$, on déduit de (3.4) et (3.5) que l'image de $[f]$ dans $\mathrm{H}^1(\mathrm{V}, \mathrm{Q})$ s'annule. Cette annulation équivaut à l'assertion (i).

Fixons un V-isomorphisme Q-équivariant $\mathrm{W}/\mathrm{R} \simeq \mathrm{V} \times_k \mathrm{Q}$. Le morphisme $\mathrm{W}_q \to \mathrm{V}$ induit par f pour $q \in \mathrm{Q}(k)$ est un torseur sous R puisque c'est la restriction, au-dessus de $\mathrm{V} \times \{q\}$, du torseur $\mathrm{W} \to \mathrm{W}/\mathrm{R} = \mathrm{V} \times_k \mathrm{Q}$ sous R. Notant $\mathrm{W}_q \times_k^{\mathrm{R}} \mathrm{T}$ le produit contracté de W_q et T sous l'action de R, l'inclusion R-équivariante de W_q dans W induit un morphisme $\mathrm{W}_q \times_k^{\mathrm{R}} \mathrm{T} \to \mathrm{W}$ de torseurs sous T. Comme tout morphisme de torseurs, c'est un isomorphisme. L'application ι envoie donc le type de W_q sur le type de W, c'est-à-dire sur $\rho(\nu)$. Ainsi, vu (3.5) et vu l'injectivité de ι (voir (3.4)), le type de W_q est λ ; d'où (ii).

Pour vérifier (iii), remarquons que $\mathrm{W}_1 \to \mathrm{V}$ (où $1 \in \mathrm{Q}(k)$ désigne le neutre) est l'un des torseurs remplissant les conditions de (iii). Au vu de la suite exacte

$$\mathrm{Q}(k) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathrm{V}, \mathrm{R}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathrm{V}, \mathrm{T}), \tag{3.6}$$

qui résulte de (3.2) et de l'hypothèse que $\bar{k}[\mathrm{V}]^* = \bar{k}^*$, il s'ensuit que tout $\mathrm{V}' \to \mathrm{V}$ remplissant les conditions de (iii) est isomorphe à $\mathrm{W}_1 \times_k^{\mathrm{R}} \mathrm{T}_q \to \mathrm{V}$ pour un $q \in \mathrm{Q}(k)$, où T_q désigne la fibre de $\mathrm{T} \to \mathrm{Q}$ en q. Or l'action de T sur W induit un isomorphisme $\mathrm{W}_1 \times_k^{\mathrm{R}} \mathrm{T}_q \to \mathrm{W}_q$. □

Corollaire 3.2. *Supposons* $\mathrm{Pic}(\mathrm{X}_{\bar{k}})$ *de type fini. Tout torseur universel de* X *contient un ouvert dense admettant un morphisme lisse, vers un tore quasi-trivial, dont les fibres sont des torseurs universels de* V*.*

Démonstration. Appliquer la proposition 3.1 (ii) en prenant pour λ et ν l'identité. □

Dans certains cas intéressants, le morphisme $\pi : \mathrm{W} \to \mathrm{Q}$ de la proposition 3.1 admet sur $\bar{k}$ une section ou au moins une section rationnelle. La proposition suivante interviendra dans la preuve du théorème B.

Proposition 3.3. *Reprenons les notations de la proposition 3.1 et supposons $k = \bar{k}$.*

(i) Si $\widehat{\mathrm{R}}$ *est sans torsion, alors π admet une section.*

(ii) Notons $\mathrm{V}' \to \mathrm{V}$ *un torseur de type λ. Si le sous-groupe de torsion de* $\widehat{\mathrm{R}}$ *est cyclique et si les compactifications lisses de* V' *sont rationnellement connexes, alors π admet une section rationnelle.*

Dans (ii), le torseur $\mathrm{V}' \to \mathrm{V}$ est unique à isomorphisme près puisque $k = \bar{k}$.

Démonstration. Si $\widehat{\mathrm{R}}$ est sans torsion, la première ligne du diagramme (3.1) est scindée, donc $\mathrm{T} \simeq \mathrm{R} \times_k \mathrm{Q}$, donc $\mathrm{W} = \mathrm{W}_1 \times_k^{\mathrm{R}} \mathrm{T} \simeq \mathrm{W}_1 \times_k \mathrm{Q}$, compte tenu de la proposition 3.1 (iii). (Comme dans la preuve de la proposition 3.1, nous notons ici $\mathrm{W}_1 = \pi^{-1}(1)$, où $1 \in \mathrm{Q}(k)$ désigne le neutre.) Le morphisme π s'identifie alors à la seconde projection $\mathrm{W}_1 \times_k \mathrm{Q} \to \mathrm{Q}$. Le choix d'un k-point de W_1 détermine une section de π. D'où (i).

Prouvons (ii). Supposons le sous-groupe de torsion de $\widehat{\mathrm{R}}$ cyclique et choisissons un isomorphisme $\widehat{\mathrm{R}} \simeq \mathbf{Z}^n \oplus \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ pour un $n \geq 0$ et un $m \geq 1$ ainsi que des relèvements dans $\widehat{\mathrm{T}}$ des n générateurs canoniques de $\mathbf{Z}^n \subset \widehat{\mathrm{R}}$ et du générateur $0 \oplus 1$ du sous-groupe de torsion de $\widehat{\mathrm{R}}$. Ces choix déterminent un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbf{Z} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{Z}^n \oplus \mathbf{Z} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{Z}^n \oplus \mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \widehat{\mathrm{Q}} \arrow[r] & \widehat{\mathrm{T}} \arrow[r] & \widehat{\mathrm{R}} \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd} \tag{3.7}$$

d'où, dualement, un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mathrm{R} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{T} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Q} \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n \times_k \boldsymbol{\mu}_m \arrow[r] & \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n \times_k \mathbf{G}_{\mathrm{m}} \arrow[r] & \mathbf{G}_{\mathrm{m}} \arrow[r] & 1.
\end{tikzcd} \tag{3.8}$$

Appliquant le foncteur $\mathrm{W} \times_k^{\mathrm{T}} -$ au carré de droite de (3.8), on obtient le carré de gauche du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{W} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[rr, bend left, dotted, "\pi"] & \mathrm{V} \times_k \mathrm{Q} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Q} \arrow[d] \\
\mathrm{W} \times_k^{\mathrm{T}} (\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n \times_k \mathbf{G}_{\mathrm{m}}) \arrow[r] & \mathrm{V} \times_k \mathbf{G}_{\mathrm{m}} \arrow[r] & \mathbf{G}_{\mathrm{m}},
\end{tikzcd} \tag{3.9}$$

dont les deux carrés sont cartésiens, dont la flèche verticale de droite est la flèche verticale de droite de (3.8) et dont les flèches horizontales de droite sont les projections. Supposons les compactifications lisses de V' rationnellement connexes. D'après la proposition 3.1 (ii), la fibre générique géométrique de π se déduit de V' par extension des scalaires. Par ailleurs, elle se déduit par extension des scalaires de la fibre générique géométrique du morphisme $\pi_0 : \mathrm{W} \times_k^{\mathrm{T}} (\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n \times_k \mathbf{G}_{\mathrm{m}}) \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}$ issu de (3.9). Les compactifications lisses de cette dernière sont donc rationnellement connexes. Comme $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$ est une courbe sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, il s'ensuit, grâce au théorème de Graber–Harris–Starr [GHS03, Theorem 1.1] combiné à [Kol96, Chapter IV, Theorem 6.10], que π_0 admet une section rationnelle. Par conséquent π admet une section rationnelle. □

Remarque 3.4. Lorsque V' est un espace homogène d'un groupe algébrique linéaire, comme ce sera le cas dans toutes les applications de la proposition 3.3 contenues dans cet article, le cas particulier du théorème de Graber–Harris–Starr utilisé ci-dessus est connu depuis Springer (voir [Ser94, Chapitre III, § 2.3, Théorème 1′ et § 2.4, Corollaire 1]).

4. Fibrations au-dessus de tores quasi-triviaux

Nous rassemblons dans ce paragraphe des énoncés (certains connus, d'autres nouveaux) concernant les points rationnels ou les zéro-cycles applicables à l'espace total de fibrations propres et lisses en variétés rationnellement connexes au-dessus d'un tore quasi-trivial. Il s'agit là de fibrations au-dessus de $\mathbf{P}_k^n$ dont le lieu des fibres singulières est géométriquement une réunion de $n+1$ hyperplans. Comme on le sait depuis [Sko96], on peut relâcher l'hypothèse de lissité et la remplacer par la condition que les fibres au-dessus des points de codimension 1 du tore quasi-trivial sont scindées. Rappelons qu'une variété est dite *scindée* si l'une au moins de ses composantes irréductibles est géométriquement irréductible et de multiplicité 1 (notion introduite dans *op. cit.*, Definition 0.1).

Fixons, dans tout le § 4, un corps de nombres k, une k-algèbre étale E et une base de E comme espace vectoriel sur k. Posons $\mathrm{Q} = \mathrm{R}_{\mathrm{E}/k}\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$, $\mathrm{Q}^{\mathrm{aff}} = \mathrm{R}_{\mathrm{E}/k}\mathbf{A}^1_{\mathrm{E}}$ et $n = [\mathrm{E} : k]$. Le choix de la base fournit un isomorphisme $\mathrm{Q}^{\mathrm{aff}} = \mathbf{A}^n_k$, d'où une suite d'inclusions $\mathrm{Q} \subset \mathrm{Q}^{\mathrm{aff}} \subset \mathbf{P}^n_k$. Fixons enfin une variété X irréductible, propre et lisse sur k et un morphisme dominant $f : \mathrm{X} \to \mathbf{P}^n_k$ dont la fibre générique est rationnellement connexe.

4.1. **Fibres presque toutes scindées.** La situation la plus favorable est celle où les fibres de f au-dessus des points de codimension 1 de $\mathrm{Q}^{\mathrm{aff}}$ sont toutes scindées. Le théorème suivant est établi dans [Sko90, Theorem 1] et [Sko96, Theorem 2.1], pour (i), et dans [Har97, Théorème 3.2.1 et la remarque à la fin du § 3.2], pour (ii). Les hypothèses de *loc. cit.* sont ici satisfaites en vertu de [GHS03, Theorem 1.1]. Pour $q \in \mathrm{Q}$, notons $\mathrm{X}_q = f^{-1}(q)$.

Théorème 4.1 (Skorobogatov (i), Harari (ii))**.** *Supposons les fibres de f au-dessus des points de codimension 1 de $\mathrm{Q}^{\mathrm{aff}}$ scindées.*

(i) Si $\mathrm{X}_q(k)$ est dense dans $\mathrm{X}_q(\mathbf{A}_k)$ pour tout point rationnel q d'un sous-ensemble hilbertien de Q, alors $\mathrm{X}(k)$ est dense dans $\mathrm{X}(\mathbf{A}_k)$.

(ii) Si $\mathrm{X}_q(k)$ est dense dans $\mathrm{X}_q(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}(\mathrm{X}_q)}$ pour tout point rationnel q d'un sous-ensemble hilbertien de Q, alors $\mathrm{X}(k)$ est dense dans $\mathrm{X}(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}(\mathrm{X})}$.

4.2. **Fibres presque toutes scindées sur $\overline{k}$.** Le morphisme $f \otimes_k \overline{k} : \mathrm{X} \otimes_k \overline{k} \to \mathbf{P}^n_{\overline{k}}$ admet une section lorsque $n = 1$, d'après [GHS03, Theorem 1.1]. Dans ce cas, ses fibres sont donc scindées. Lorsque $n > 1$, en revanche, la condition que les fibres de $f \otimes_k \overline{k}$ au-dessus des points de codimension 1 de $\mathrm{Q}^{\mathrm{aff}} \otimes_k \overline{k}$ sont scindées est une condition forte, rarement satisfaite en pratique. Sous cette hypothèse, on peut établir l'énoncé inconditionnel suivant.

Théorème 4.2. *Supposons les fibres de f au-dessus des points de codimension 1 de Q et les fibres de $f \otimes_k \overline{k}$ au-dessus des points de codimension 1 de $\mathrm{Q}^{\mathrm{aff}} \otimes_k \overline{k}$ scindées.*

(i) Si $\mathrm{X}_q(k)$ est dense dans $\mathrm{X}_q(\mathbf{A}_k)$ pour tout point rationnel q d'un sous-ensemble hilbertien de Q, alors $\mathrm{X}(k)$ est dense dans $\mathrm{X}(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}_1(\mathrm{X})}$.

(ii) Si $\mathrm{X}_q(k)$ est dense dans $\mathrm{X}_q(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}(\mathrm{X}_q)}$ pour tout point rationnel q d'un sous-ensemble hilbertien de Q, alors $\mathrm{X}(k)$ est dense dans $\mathrm{X}(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}(\mathrm{X})}$.

Démonstration. Comme $\mathrm{Q}^{\mathrm{aff}}$ ne contient qu'un nombre fini de points de codimension 1 hors de Q, il existe une extension finie ℓ/k telle que les fibres de $f \otimes_k \ell$ au-dessus des points de codimension 1 de $\mathrm{Q}^{\mathrm{aff}} \otimes_k \ell$ soient scindées. Soit $\mathrm{Q}' = \mathrm{R}_{\mathrm{E}\otimes_k\ell/k}\mathbf{G}_{\mathrm{m}} \subset \mathrm{Q}'^{\mathrm{aff}} = \mathrm{R}_{\mathrm{E}\otimes_k\ell/k}\mathbf{A}^1$. Pour $r \in \mathrm{Q}(k)$, soit $b^{\mathrm{aff}(r)} : \mathrm{Q}'^{\mathrm{aff}} \to \mathrm{Q}^{\mathrm{aff}}$ le morphisme défini par $b^{\mathrm{aff}(r)}(x) = r\mathrm{N}_{\mathrm{E}\otimes_k\ell/\mathrm{E}}(x)$. Le choix d'une base de ℓ sur k définit une compactification $\mathrm{Q}'^{\mathrm{aff}} \subset \mathbf{P}^{n'}_k$, avec $n' = \dim(\mathrm{Q}')$. Définissons $\mathrm{V}^{\mathrm{aff}}$, $\mathrm{V}'^{\mathrm{aff}(r)}$ et $c^{\mathrm{aff}(r)}$ par le diagramme suivant, dont tous les carrés sont cartésiens et dans lequel $\mathrm{X}'^{(r)}$ est une compactification lisse arbitraire de $\mathrm{V}'^{\mathrm{aff}(r)}$ telle que $f'^{(r)}$ soit un morphisme :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{X}'^{(r)} & \supset & \mathrm{V}'^{\mathrm{aff}(r)} & \xrightarrow{c^{\mathrm{aff}(r)}} & \mathrm{V}^{\mathrm{aff}} & \subset & \mathrm{X} \\ \downarrow{\scriptstyle f'^{(r)}} & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \mathbf{P}^{n'}_k & \supset & \mathrm{Q}'^{\mathrm{aff}} & \xrightarrow{b^{\mathrm{aff}(r)}} & \mathrm{Q}^{\mathrm{aff}} & \subset & \mathbf{P}^n_k. \end{array}$$

Lemme 4.3. *Pour tout $r \in \mathrm{Q}(k)$, les fibres de $f'^{(r)}$ au-dessus des points de codimension 1 de $\mathrm{Q}'^{\mathrm{aff}}$ sont scindées.*

Démonstration. Soit $\xi \in \mathrm{Q}'^{\mathrm{aff}}$ un point de codimension 1. Le point $b^{\mathrm{aff}(r)}(\xi) \in \mathrm{Q}^{\mathrm{aff}}$ est de codimension ≤ 1 puisque $(b^{\mathrm{aff}(r)})^{-1}(b^{\mathrm{aff}(r)}(\xi))$ contient ξ et est, comme chaque fibre de $b^{\mathrm{aff}(r)}$, de dimension $\dim(\mathrm{Q}'^{\mathrm{aff}}) - \dim(\mathrm{Q}^{\mathrm{aff}})$. Si $\xi \in \mathrm{Q}'$, on a de plus $b^{\mathrm{aff}(r)}(\xi) \in \mathrm{Q}$, de sorte que $f^{-1}(b^{\mathrm{aff}(r)}(\xi))$ est scindée, donc $(f'^{(r)})^{-1}(\xi)$ aussi. Si $\xi \notin \mathrm{Q}'$, alors ℓ se plonge k-linéairement dans le corps résiduel de ξ. Pour vérifier, dans ce cas, que $(f'^{(r)})^{-1}(\xi)$ est scindée, il est donc loisible d'étendre les scalaires de k à ℓ, ce qui permet de supposer que $\ell = k$. La variété $f^{-1}(b^{\mathrm{aff}(r)}(\xi))$ est alors elle-même scindée, par définition de ℓ. □

Posons $\mathrm{V} = f^{-1}(\mathrm{Q})$ et $\mathrm{V}'^{(r)} = (f'^{(r)})^{-1}(\mathrm{Q}')$ et notons $b^{(r)} : \mathrm{Q}' \to \mathrm{Q}$ et $c^{(r)} : \mathrm{V}'^{(r)} \to \mathrm{V}$ les morphismes induits par $b^{\mathrm{aff}(r)}$ et $c^{\mathrm{aff}(r)}$. Posons $\mathrm{T} = \mathrm{Ker}(b^{(1)}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{N}_{\mathrm{E}\otimes_k \ell/\mathrm{E}} : \mathrm{Q}' \to \mathrm{Q})$.

Lemme 4.4. *Pour $r \in \mathrm{Q}(k)$, le morphisme $c^{(r)}$ est un torseur sous le tore T. Tout tordu de $c^{(1)}$ (où $1 \in \mathrm{Q}(k)$ est le neutre) par un cocycle de $\mathrm{Z}^1(k, \mathrm{T})$ est isomorphe à l'un des $c^{(r)}$.*

Démonstration. En effet $b^{(r)}$ est un torseur sous T et les classes de $b^{(r)}$ et de $b^{(1)}$ dans $\mathrm{H}^1(\mathrm{Q}, \mathrm{T})$ diffèrent par l'image de r par l'application bord $\mathrm{Q}(k) \to \mathrm{H}^1(k, \mathrm{T})$, laquelle est surjective puisque $\mathrm{H}^1(k, \mathrm{Q}') = 0$ en vertu du théorème de Hilbert 90. □

Nous sommes maintenant en position d'établir (i) et (ii).

Supposons $\mathrm{X}_q(k)$ dense dans $\mathrm{X}_q(\mathbf{A}_k)$ pour tout point rationnel q d'un sous-ensemble hilbertien de Q. Fixons un point adélique $(\mathrm{P}_v)_{v\in\Omega} \in \mathrm{X}(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}_1(\mathrm{X})}$ et montrons qu'on peut l'approcher par un point rationnel de X. Soit $\mathrm{A} \subset \mathrm{Br}_1(\mathrm{V})$ le sous-groupe formé des cup-produits d'un élément de $\mathrm{H}^1(k, \widehat{\mathrm{T}})$ par $[c^{(1)}] \in \mathrm{H}^1(\mathrm{V}, \mathrm{T})$. Comme A est fini, le "lemme formel" de Harari assure qu'il existe $(\mathrm{P}'_v)_{v\in\Omega} \in \mathrm{V}(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{A}}$ arbitrairement proche de $(\mathrm{P}_v)_{v\in\Omega}$ dans $\mathrm{X}(\mathbf{A}_k)$ (voir [CTS00, Proposition 1.1]). D'après [HS13, Theorem 8.4, Proposition 8.12] appliqué à $c^{(1)} : \mathrm{V}'^{(1)} \to \mathrm{V}$ et d'après le lemme 4.4, il existe $r \in \mathrm{Q}(k)$ et $(\mathrm{P}''_v)_{v\in\Omega} \in \mathrm{V}'^{(r)}(\mathbf{A}_k)$ relevant $(\mathrm{P}'_v)_{v\in\Omega}$. Grâce au lemme 4.3 et compte tenu que l'image réciproque par $b^{(r)}$ d'un sous-ensemble hilbertien de Q est un sous-ensemble hilbertien de Q', le théorème 4.1 (i) est applicable à $f'^{(r)}$. Il existe donc $\mathrm{P}'' \in \mathrm{V}'^{(r)}(k)$ arbitrairement proche, dans $\mathrm{X}'^{(r)}(\mathbf{A}_k)$, de $(\mathrm{P}''_v)_{v\in\Omega}$. Alors $c^{(r)}(\mathrm{P}'') \in \mathrm{X}(k)$ est arbitrairement proche de $(\mathrm{P}_v)_{v\in\Omega}$ dans $\mathrm{X}(\mathbf{A}_k)$.

Supposons maintenant $\mathrm{X}_q(k)$ dense dans $\mathrm{X}_q(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}(\mathrm{X}_q)}$ pour tout point rationnel q d'un sous-ensemble hilbertien de Q, fixons un point adélique $(\mathrm{P}_v)_{v\in\Omega} \in \mathrm{X}(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}(\mathrm{X})}$ et montrons qu'on peut l'approcher par un point rationnel de X. D'après le corollaire 2.2 appliqué à $c^{(1)} : \mathrm{V}'^{(1)} \to \mathrm{V}$ et d'après le lemme 4.4, il existe $r \in \mathrm{Q}(k)$ et $(\mathrm{P}''_v)_{v\in\Omega} \in \mathrm{V}'^{(r)}(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(\mathrm{V}'^{(r)})}$

tels que $(c^{(r)}(\mathrm{P}''_v))_{v\in\Omega}$ soit arbitrairement proche de $(\mathrm{P}_v)_{v\in\Omega}$ dans $\mathrm{X}(\mathbf{A}_k)$. Comme au paragraphe précédent, le lemme 4.3 permet d'appliquer le théorème 4.1 (ii) à $f'^{(r)}$. Il en résulte l'existence de $\mathrm{P}'' \in \mathrm{V}'^{(r)}(k)$ arbitrairement proche, dans $\mathrm{X}'^{(r)}(\mathbf{A}_k)$, de $(\mathrm{P}''_v)_{v\in\Omega}$. Le point $c^{(r)}(\mathrm{P}'') \in \mathrm{X}(k)$ est alors arbitrairement proche de $(\mathrm{P}_v)_{v\in\Omega}$ dans $\mathrm{X}(\mathbf{A}_k)$. □

Remarque 4.5. Si X est une variété propre et lisse sur k, si $\mathrm{V} \subset \mathrm{X}$ est un ouvert dense tel que $\overline{k}[\mathrm{V}]^* = \overline{k}^*$ et si les groupes $\mathrm{Pic}(\mathrm{X}_{\overline{k}})$ et $\mathrm{Pic}(\mathrm{V}_{\overline{k}})$ sont sans torsion, le théorème 4.2 (i) et la proposition 3.3 (i) permettent de justifier l'implication suivante, énoncée dans [Wit16, Remark 3.9] : si tout torseur universel de V vérifie l'approximation faible, alors tout torseur universel de X vérifie l'approximation faible. En effet, fixons un torseur universel Y de X. La proposition 3.1 fournit un ouvert dense $\mathrm{W} \subset \mathrm{Y}$, un tore quasi-trivial Q sur k et un morphisme lisse $\pi : \mathrm{W} \to \mathrm{Q}$ dont les fibres sont des torseurs universels de V. La proposition 3.3 (i) assure que $\pi \otimes_k \overline{k}$ admet une section et donc que si $\pi' : \mathrm{Z} \to \mathbf{P}^n_k$ désigne une fibration compactifiant π, les fibres de $\pi' \otimes_k \overline{k}$ au-dessus des points de codimension 1 de $\mathrm{Q}^{\mathrm{aff}} \otimes_k \overline{k}$ sont scindées. Par le théorème 4.2 (i), il s'ensuit que si tout torseur universel de V vérifie l'approximation faible, alors $\mathrm{Z}(k)$ est dense dans $\mathrm{Z}(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}_1(\mathrm{Z})}$. Or $\mathrm{Br}_1(\mathrm{Z}) = \mathrm{Br}_0(\mathrm{Z})$ (voir [CTS87, Théorème 2.1.2]) : donc Z et Y vérifient l'approximation faible.

4.3. Fibres non scindées sur $\overline{k}$.

Les deux énoncés suivants ne font aucune hypothèse sur les fibres de f au-dessus des points de codimension 1 de $\mathrm{Q}^{\mathrm{aff}}$.

Théorème 4.6 ([HW16, Corollary 9.25])**.** *Si la conjecture* [HW16, Conjecture 9.1] *est vraie pour k et si $\mathrm{X}_q(k)$ est dense dans $\mathrm{X}_q(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}(\mathrm{X}_q)}$ pour tout point rationnel q d'un sous-ensemble hilbertien de* Q*, alors* $\mathrm{X}(k)$ *est dense dans* $\mathrm{X}(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}(\mathrm{X})}$*.*

Théorème 4.7 ([HW16, Corollary 8.4 (1)])**.** *Si* X_q *vérifie la conjecture* (E) *pour tout point fermé q d'un sous-ensemble hilbertien de* Q*, alors* X *vérifie la conjecture* (E)*.*

Il paraît raisonnable d'espérer que le théorème 4.6 puisse être rendu inconditionnel dans le cas où les fibres de f au-dessus des points de codimension 1 de Q sont scindées (hypothèse satisfaite dans toutes les applications de ce théorème envisagées dans le présent article).

5. Revêtements étales des espaces homogènes

Dans tout le § 5, on fixe un corps k de caractéristique nulle, une clôture algébrique $\overline{k}$ de k et un groupe algébrique G connexe, semi-simple et simplement connexe sur k.

5.1. Action extérieure galoisienne sur le stabilisateur.

Soit V un espace homogène de G. Fixons $\bar{v} \in \mathrm{V}(\overline{k})$ et supposons son stabilisateur $\mathrm{H}_{\bar{v}} \subset \mathrm{G}(\overline{k})$ fini. Comme $\pi_1^{\text{ét}}(\mathrm{G}_{\overline{k}}, 1) = 1$ et comme $\mathrm{V}_{\overline{k}} = \mathrm{G}_{\overline{k}}/\mathrm{H}_{\bar{v}}$, on a canoniquement $\pi_1^{\text{ét}}(\mathrm{V}_{\overline{k}}, \bar{v}) = \mathrm{H}_{\bar{v}}$. La suite exacte fondamentale

$$1 \longrightarrow \pi_1^{\text{ét}}(\mathrm{V}_{\overline{k}}, \bar{v}) \longrightarrow \pi_1^{\text{ét}}(\mathrm{V}, \bar{v}) \longrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{k}/k) \longrightarrow 1 \tag{5.1}$$

induit donc une action extérieure canonique de $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ sur $\mathrm{H}_{\bar{v}}$. Celle-ci induit une action continue de $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ sur $\mathrm{H}_{\bar{v}}^{\mathrm{ab}}$. Remarquons qu'une action extérieure naturelle de $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ sur $\mathrm{H}_{\bar{v}}$ existerait même si nous n'avions pas supposé G simplement connexe (voir [DLA17,

§ 2.3]). Remarquons, d'autre part, que la classe d'isomorphisme de $\mathrm{H}_{\bar{v}}$ vu comme groupe fini muni d'une action extérieure de $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ ne dépend pas du choix de $\bar{v}$.

5.2. **Groupe de Picard.** Comme G est semi-simple, le lemme de Rosenlicht assure que $\overline{k}[\mathrm{G}]^* = \overline{k}^*$ et donc $\overline{k}[\mathrm{V}]^* = \overline{k}^*$. Il s'ensuit que $\mathrm{H}^1(\mathrm{V}_{\overline{k}}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(1)) = \mathrm{Pic}(\mathrm{V}_{\overline{k}})_{\mathrm{tors}}$, par théorie de Kummer. D'autre part, le groupe $\mathrm{Pic}(\mathrm{V}_{\overline{k}})$ est de torsion puisque $\mathrm{G}_{\overline{k}}$ est un revêtement de $\mathrm{V}_{\overline{k}}$ et que $\mathrm{Pic}(\mathrm{G}_{\overline{k}}) = 0$ (voir [Vos98, § 4.3, Theorem 1]). De ces remarques et de l'égalité $\mathrm{H}^1(\mathrm{V}_{\overline{k}}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(1)) = \mathrm{Hom}(\pi_1^{\text{ét}}(\mathrm{V}_{\overline{k}}, \bar{v}), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(1))$, on tire un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Pic}(\mathrm{V}_{\overline{k}}) = \mathrm{Hom}(\mathrm{H}_{\bar{v}}^{\mathrm{ab}}, \overline{k}^*) \tag{5.2}$$

de groupes finis munis d'une action continue de $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$.

5.3. **Relèvement de l'action de** G.

Proposition 5.1. *Soit* V *un espace homogène de* G *à stabilisateur géométrique fini. Soit* $\pi : \mathrm{W} \to \mathrm{V}$ *un revêtement étale. Si* W *est géométriquement irréductible, il existe une unique action de* G *sur* W *telle que* π *soit* G*-équivariant. Munie de cette action, la variété* W *est un espace homogène de* G *à stabilisateur géométrique fini.*

Démonstration. Prouvons d'abord l'unicité. Notons $m_{\mathrm{V}} : \mathrm{G} \times_k \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ l'action de G sur V. Deux actions $m^1_{\mathrm{W}}, m^2_{\mathrm{W}} : \mathrm{G} \times_k \mathrm{W} \to \mathrm{W}$ de G sur W rendant π équivariant donnent naissance à deux morphismes du revêtement étale $\mathrm{Id}_{\mathrm{G}} \times \pi : \mathrm{G} \times_k \mathrm{W} \to \mathrm{G} \times_k \mathrm{V}$ vers le revêtement étale de $\mathrm{G} \times_k \mathrm{V}$ obtenu à partir de π par le changement de base m_{V}. Ces deux morphismes de revêtements étales coïncident le long de $\{1\} \times_k \mathrm{W}$. Comme $\mathrm{G} \times_k \mathrm{W}$ est connexe, ils sont donc nécessairement égaux ; d'où $m^1_{\mathrm{W}} = m^2_{\mathrm{W}}$.

Par descente galoisienne, l'existence et l'unicité de l'action recherchée sur k résultent de son existence et de son unicité sur $\overline{k}$. Il reste donc, pour conclure, à vérifier son existence sur $\overline{k}$. Avec les notations du § 5.1, comme $\mathrm{G}_{\overline{k}} \to \mathrm{G}_{\overline{k}}/\mathrm{H}_{\bar{v}} = \mathrm{V}_{\overline{k}}$ est le revêtement universel de $\mathrm{V}_{\overline{k}}$ et comme $\mathrm{W}_{\overline{k}}$ est connexe, le choix d'un relèvement $\bar{w} \in \mathrm{W}(\overline{k})$ de $\bar{v}$ permet d'identifier le groupe $\pi_1^{\text{ét}}(\mathrm{W}_{\overline{k}}, \bar{w})$ à un sous-groupe de $\mathrm{H}_{\bar{v}}$ et le morphisme $\pi \otimes_k \overline{k}$ à la projection $\mathrm{G}_{\overline{k}}/\pi_1^{\text{ét}}(\mathrm{W}_{\overline{k}}, \bar{w}) \to \mathrm{G}_{\overline{k}}/\mathrm{H}_{\bar{v}}$. L'action recherchée existe donc bien sur $\overline{k}$. □

5.4. **Torseurs et revêtements.** Si $\widehat{\mathrm{R}}$ est un groupe abélien fini muni d'une action continue de $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ et $\lambda : \widehat{\mathrm{R}} \to \mathrm{Pic}(\mathrm{V}_{\overline{k}})$ est un homomorphisme $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$-équivariant injectif, on pose $\mathrm{R} = \mathscr{H}\!om(\widehat{\mathrm{R}}, \mathbf{G}_{\mathrm{m}})$ et l'on note $\widehat{\lambda} : \mathrm{H}_{\bar{v}} \to \mathrm{R}(\overline{k})$ la composée de la flèche d'abélianisation $\mathrm{H}_{\bar{v}} \to \mathrm{H}_{\bar{v}}^{\mathrm{ab}}$ et de l'homomorphisme $\mathrm{H}_{\bar{v}}^{\mathrm{ab}} \to \mathrm{R}(\overline{k})$ dual de λ compte tenu de (5.2).

Proposition 5.2. *Avec les notations qui précèdent, soit* $\pi : \mathrm{W} \to \mathrm{V}$ *un torseur sous* R*, de type* λ*. Il existe une unique action de* G *sur* W *telle que* π *soit* G*-équivariant. Munie de cette action, la variété* W *est un espace homogène de* G *à stabilisateur géométrique fini. De plus, si* $\bar{w} \in \mathrm{W}(\overline{k})$ *est tel que* $\pi(\bar{w}) = \bar{v}$ *et si* $\mathrm{H}_{\bar{w}} \subset \mathrm{G}(\overline{k})$ *désigne son stabilisateur, le morphisme* $\widehat{\lambda} : \mathrm{H}_{\bar{v}} \to \mathrm{R}(\overline{k})$ *induit une suite exacte*

$$1 \longrightarrow \mathrm{H}_{\bar{w}} \longrightarrow \mathrm{H}_{\bar{v}} \xrightarrow{\widehat{\lambda}} \mathrm{R}(\overline{k}) \to 1 \tag{5.3}$$

de groupes finis. Enfin, les actions extérieures de $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ *sur* $\mathrm{H}_{\bar{w}}$ *et* $\mathrm{H}_{\bar{v}}$ *sont compatibles, au sens où pour tout* $\gamma \in \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$*, les automorphismes extérieurs de* $\mathrm{H}_{\bar{w}}$ *et* $\mathrm{H}_{\bar{v}}$ *déterminés par* γ *peuvent être représentés par des automorphismes* $\gamma_{\bar{w}}$ *et* $\gamma_{\bar{v}}$ *de ces deux groupes tels que* $\gamma_{\bar{w}}(x) = \gamma_{\bar{v}}(x)$ *pour tout* $x \in \mathrm{H}_{\bar{w}}$*.*

Démonstration. Commençons par un lemme.

Lemme 5.3. *Le revêtement étale*

$$\mathrm{G}_{\overline{k}}/\mathrm{Ker}(\widehat{\lambda}) \to \mathrm{G}_{\overline{k}}/\mathrm{H}_{\bar{v}} = \mathrm{V}_{\overline{k}} \tag{5.4}$$

est un torseur sous $\mathrm{R}_{\overline{k}}$ *dont le type est* λ*.*

Démonstration. Le morphisme $\widehat{\lambda}$ étant surjectif, ce revêtement est bien un torseur sous $\mathrm{R}_{\overline{k}}$. Sa classe dans $\mathrm{H}^1(\mathrm{V}_{\overline{k}}, \mathrm{R}_{\overline{k}}) = \mathrm{Hom}(\pi_1^{\text{ét}}(\mathrm{V}_{\overline{k}}, \bar{v}), \mathrm{R}(\overline{k}))$ est le morphisme composé

$$\pi_1^{\text{ét}}(\mathrm{V}_{\overline{k}}, \bar{v}) = \mathrm{H}_{\bar{v}} \to \mathrm{H}_{\bar{v}}/\mathrm{Ker}(\widehat{\lambda}) \xrightarrow{\widehat{\lambda}} \mathrm{R}(\overline{k}). \tag{5.5}$$

Compte tenu des identifications $\mathrm{Pic}(\mathrm{V}_{\overline{k}}) = \mathrm{H}^1(\mathrm{V}_{\overline{k}}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(1)) = \mathrm{Hom}(\pi_1^{\text{ét}}(\mathrm{V}_{\overline{k}}, \bar{v}), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(1))$, son type envoie $\chi \in \widehat{\mathrm{R}} = \mathrm{Hom}(\mathrm{R}(\overline{k}), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(1))$ sur le morphisme obtenu en composant (5.5) avec $\chi : \mathrm{R}(\overline{k}) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(1)$. Celui-ci représente bien $\lambda(\chi)$. □

Démontrons maintenant la proposition. Comme le torseur π est de type λ, il devient isomorphe, sur $\overline{k}$, à (5.4). En particulier, la variété W est géométriquement irréductible. L'existence et l'unicité de l'action de G résultent alors de la proposition 5.1. En outre, il apparaît sur (5.4) que $\mathrm{H}_{\bar{w}} = \mathrm{Ker}(\widehat{\lambda})$, d'où l'exactitude de (5.3). Quant à la compatibilité des actions extérieures de $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ sur $\mathrm{H}_{\bar{w}}$ et $\mathrm{H}_{\bar{v}}$, elle découle de l'existence d'un morphisme entre les suites exactes (5.1) associées à W et à V. □

Corollaire 5.4. *Soit* V *un espace homogène de* G *à stabilisateur géométrique fini. Notant* H *le stabilisateur d'un point géométrique de* V*, les torseurs universels de* V *sont des espaces homogènes de* G *à stabilisateur géométrique isomorphe au sous-groupe dérivé* H'*.*

5.5. **Passage aux sous-groupes de Sylow.** La proposition suivante servira dans la preuve du théorème A.

Proposition 5.5. *Soit* V *un espace homogène de* G*, à stabilisateur géométrique fini. Soit* p *un nombre premier. Il existe une extension finie* ℓ/k *de degré premier à* p*, un espace homogène* W*, sur* ℓ*, de* $\mathrm{G} \otimes_k \ell$*, à stabilisateur géométrique fini d'ordre une puissance de* p*, et un morphisme fini étale* $\mathrm{W} \to \mathrm{V} \otimes_k \ell$ *de degré premier à* p*.*

Démonstration. Commençons par un lemme de théorie des groupes.

Lemme 5.6. *Soit* p *un nombre premier. Toute suite exacte*

$$1 \longrightarrow \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{E} \longrightarrow \Gamma \longrightarrow 1$$

de groupes profinis, avec H *fini, s'inscrit dans un diagramme commutatif à lignes exactes*

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathrm{H}_p & \longrightarrow & \mathrm{E}_p & \longrightarrow & \Gamma_p & \longrightarrow & 1 \\ & & \cap & & \cap & & \cap & & \\ 1 & \longrightarrow & \mathrm{H} & \longrightarrow & \mathrm{E} & \longrightarrow & \Gamma & \longrightarrow & 1, \end{array}$$

où H_p, E_p, Γ_p *sont des p-Sylow de* H, E, Γ *respectivement.*

Démonstration. Soit E_p un p-Sylow de E (voir [Ser94, Chapitre I, § 1.4, Proposition 3]). D'après *loc. cit.*, Proposition 4 (b), l'image Γ_p de E_p dans Γ est un p-Sylow de Γ. Posons $\mathrm{H}_p = \mathrm{H} \cap \mathrm{E}_p$ et notons $\mathrm{E}_0 \subset \mathrm{E}$ l'image réciproque de Γ_p. En termes de nombres surnaturels (*loc. cit.*, § 1.3), l'ordre de E_0, extension de Γ_p par H, est le produit d'une puissance surnaturelle de p et d'un entier fini premier à p. L'ensemble $\mathrm{E}_0/\mathrm{E}_p$ est donc fini d'ordre premier à p. Comme $\mathrm{H}/\mathrm{H}_p = \mathrm{E}_0/\mathrm{E}_p$, il s'ensuit que H_p est un p-Sylow de H. □

Notons $\mathrm{H}_p \subset \pi_1(\mathrm{V}_{\overline{k}}, \bar{v})$, $\mathrm{E}_p \subset \pi_1^{\text{ét}}(\mathrm{V}, \bar{v})$, $\Gamma_p \subset \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ les p-Sylow donnés par le lemme appliqué à la suite exacte (5.1). Notons $k' \subset \overline{k}$ le sous-corps des invariants de Γ_p et voyons E_p comme un sous-groupe d'indice fini premier à p de $\pi_1^{\text{ét}}(\mathrm{V} \otimes_k k', \bar{v})$. Il lui correspond un revêtement étale pointé de $\mathrm{V} \otimes_k k'$, géométriquement connexe sur k' et de degré premier à p. Choisissons une sous-extension finie ℓ/k de k'/k telle que ce revêtement provienne, par extension des scalaires, d'un revêtement étale $\mathrm{W} \to \mathrm{V} \otimes_k \ell$ géométriquement connexe sur ℓ, muni d'un point $\bar{w} \in \mathrm{W}(\overline{k})$. Comme Γ_p est un p-Sylow de $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$, le degré de ℓ sur k est premier à p. D'après la proposition 5.1, la variété W est un espace homogène de $\mathrm{G} \otimes_k \ell$ à stabilisateur géométrique fini. Ce stabilisateur s'identifie à $\pi_1^{\text{ét}}(\mathrm{W} \otimes_\ell \overline{k}, \bar{w}) = \mathrm{H}_p$, dont l'ordre est bien une puissance de p. □

6. Points rationnels des espaces homogènes

Nous combinons, dans ce paragraphe, le contenu des §§ 2–5 afin d'en déduire des résultats sur les points rationnels des espaces homogènes de groupes linéaires semi-simples simplement connexes, à stabilisateur géométrique fini, sur les corps de nombres.

6.1. **Un énoncé conditionnel.** Afin de présenter la stratégie générale employée dans tout l'article, on commence par le théorème conditionnel suivant. Nous rendrons cette stratégie inconditionnelle dans deux cas : celui où le stabilisateur géométrique est abélien, retrouvant ainsi un théorème de Borovoi [Bor96], et celui où le stabilisateur géométrique est *hyper-résoluble* en tant que groupe fini muni d'une action extérieure de $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$.

Théorème 6.1. *Soit* X *une variété propre, lisse et géométriquement irréductible sur un corps de nombres k. Supposons* X *birationnellement équivalente à un espace homogène d'un groupe algébrique linéaire semi-simple simplement connexe, à stabilisateur géométrique fini résoluble. Si la conjecture* [HW16, Conjecture 9.1] *est vraie pour k, l'ensemble* $\mathrm{X}(k)$ *est dense dans* $\mathrm{X}(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}(\mathrm{X})}$.

Démonstration. Notons V l'espace homogène et G le groupe algébrique linéaire semi-simple simplement connexe. Quitte à remplacer X par une compactification lisse de V, on peut supposer que V est un ouvert dense de X (voir [CTPS16, Proposition 6.1 (iii)], [CTS13, Lemma 1.3]). Fixons $\bar{v} \in \mathrm{V}(\bar{k})$, notons $\mathrm{H}_{\bar{v}} \subset \mathrm{G}(\bar{k})$ son stabilisateur et prouvons le théorème par récurrence sur l'ordre de $\mathrm{H}_{\bar{v}}$. Lorsque $\mathrm{H}_{\bar{v}}$ est trivial, l'ensemble $\mathrm{X}(k)$ est même dense dans $\mathrm{X}(\mathbf{A}_k)$ (Kneser, Harder, Chernousov ; voir [PR94, Theorem 6.6, Theorem 7.8]). Pour $\mathrm{H}_{\bar{v}}$ fini résoluble quelconque, supposons $\mathrm{X}(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}(\mathrm{X})} \neq \varnothing$. La variété X admet alors un torseur universel (voir [Sko01, Proposition 6.1.4]). Le théorème 2.1 appliqué à un tel torseur montre que pour établir la densité de $\mathrm{X}(k)$ dans $\mathrm{X}(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}(\mathrm{X})}$, il suffit d'établir celle de $\mathrm{Z}(k)$ dans $\mathrm{Z}(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}(\mathrm{Z})}$ pour une compactification lisse Z de chaque torseur universel de X. Fixons Z. D'après le corollaire 3.2, il existe un ouvert dense $\mathrm{Z}^0 \subset \mathrm{Z}$, un tore quasi-trivial Q et un morphisme lisse $f^0 : \mathrm{Z}^0 \to \mathrm{Q}$ dont les fibres sont des torseurs universels de V. Par le corollaire 5.4, ceux-ci sont des espaces homogènes de G à stabilisateur géométrique fini résoluble d'ordre strictement inférieur à l'ordre de $\mathrm{H}_{\bar{v}}$, puisque $\mathrm{H}_{\bar{v}}$ est résoluble. Grâce à l'hypothèse de récurrence, on peut donc appliquer le théorème 4.6 à une fibration $f : \mathrm{Z}' \to \mathbf{P}^n_k$ compactifiant f^0 et conclure que $\mathrm{Z}'(k)$ est dense dans $\mathrm{Z}'(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}(\mathrm{Z}')}$ et donc que $\mathrm{Z}(k)$ est dense dans $\mathrm{Z}(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}(\mathrm{Z})}$. □

6.2. **Stabilisateurs finis abéliens.** Le théorème suivant est dû à Borovoi [Bor96].

Théorème 6.2. *Soit* X *une variété propre, lisse et géométriquement irréductible sur un corps de nombres* k*. Supposons* X *birationnellement équivalente à un espace homogène d'un groupe algébrique linéaire semi-simple simplement connexe, à stabilisateur géométrique fini abélien. L'ensemble* $\mathrm{X}(k)$ *est dense dans* $\mathrm{X}(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}_1(\mathrm{X})}$.

Le point de vue adopté ici le démontre aussi : il suffit de suivre la preuve du théorème 6.1 en remplaçant le théorème 2.1 par [Sko01, Theorem 6.1.1] et, à la fin, le théorème 4.6 par le théorème 4.1 (i), dont l'hypothèse sur les fibres au-dessus des points de codimension 1 est satisfaite grâce à [CTK06, Théorème 4.2].

Alternativement, on peut éviter le recours à [CTK06] ainsi qu'au théorème 4.1 (i) en remarquant, suivant Borovoi [Bor96, § 3], qu'une version élémentaire de la méthode des fibrations s'applique ici : en effet, les fibres lisses de la fibration considérée sont des torseurs sous des groupes algébriques linéaires connexes semi-simples simplement connexes, donc vérifient les hypothèses du lemme ci-dessous d'après [PR94, Theorem 6.4, Theorem 6.6, Theorem 7.8]. Ce lemme nous resservira au § 7.

Lemme 6.3. *Soit* $f : \mathrm{Z} \to \mathrm{B}$ *un morphisme dominant entre variétés irréductibles lisses sur un corps de nombres* k*. Considérons, pour une variété* Y *sur* k*, la propriété suivante :*

($\star$) *si* $\mathrm{Y}(k_v) \neq \varnothing$ *pour toute place réelle* v*, alors* $\mathrm{Y}(k) \neq \varnothing$ *et* $\mathrm{Y}(k)$ *est dense dans* $\mathrm{Y}(\mathbf{A}_k)$*.*

Si B *et les fibres de* f *au-dessus des points rationnels d'un ouvert dense de* B *vérifient* ($\star$)*, alors* Z *vérifie* ($\star$) *aussi.*

Démonstration. Soit $\mathrm{Z}^0 \subset \mathrm{Z}$ un ouvert dense sur lequel f est lisse. Soit $\mathrm{B}^0 \subset \mathrm{B}$ un ouvert dense tel que pour tout $b \in \mathrm{B}^0(k)$, la fibre Z_b vérifie ($\star$). Supposons que $\mathrm{Z}(k_v) \neq \varnothing$ pour toute place v réelle. Alors $\mathrm{Z}^0(k_v) \neq \varnothing$ et $\mathrm{B}(k_v) \neq \varnothing$ pour toute place v réelle. Soit S un ensemble fini de places de k contenant les places réelles ; on prend S égal à l'ensemble des places réelles pour prouver que $\mathrm{Z}(k) \neq \varnothing$, arbitraire pour établir l'approximation faible pour Z. Pour chaque $v \in \mathrm{S}$, soit $\mathrm{P}_v \in \mathrm{Z}^0(k_v)$. D'après ($\star$) pour B, il existe $b \in \mathrm{B}^0(k)$ arbitrairement proche des $f(\mathrm{P}_v)$. Quitte à modifier les P_v, on peut supposer, grâce au théorème des fonctions implicites, que $f(\mathrm{P}_v) = b$ pour $v \in \mathrm{S}$. Par ($\star$) pour Z_b, il s'ensuit que Z_b (et donc Z) contient un point rationnel arbitrairement proche des P_v. □

6.3. **Stabilisateurs finis hyper-résolubles.** La notion de groupe hyper-résoluble (voir [Ser98, § 8.3]) s'étend aux groupes munis d'une action extérieure de $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$:

Définition 6.4. Un groupe fini H muni d'une action extérieure de $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ est dit *hyper-résoluble* s'il existe un entier m et une suite

$$\{1\} = \mathrm{H}_0 \subset \mathrm{H}_1 \subset \cdots \subset \mathrm{H}_m = \mathrm{H}$$

de sous-groupes distingués de H, stables sous l'action extérieure de $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$, avec $\mathrm{H}_i/\mathrm{H}_{i-1}$ cyclique pour $i \in \{1, \ldots, m\}$. On parle ici de stabilité d'un sous-groupe distingué sous un automorphisme extérieur pour désigner sa stabilité sous un automorphisme quelconque représentant l'automorphisme extérieur en question ; cette propriété ne dépend pas du représentant choisi puisque le sous-groupe est distingué.

Exemple 6.5. Lorsque l'action extérieure est triviale, cette définition coïncide avec la définition classique. En particulier, munis de l'action extérieure triviale, les groupes nilpotents et les groupes diédraux sont hyper-résolubles (voir [Ser98, § 8.3]).

Lorsque le stabilisateur géométrique est hyper-résoluble en tant que groupe fini muni d'une action extérieure de $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ (voir § 5.1), la preuve du théorème 6.1 peut être rendue inconditionnelle grâce au théorème 4.2 (ii) et à la proposition 3.3 (ii).

Théorème 6.6. *Soit* X *une variété propre, lisse et géométriquement irréductible sur un corps de nombres k. Si* X *est birationnellement équivalente à un espace homogène d'un groupe algébrique linéaire semi-simple simplement connexe, à stabilisateur géométrique fini hyper-résoluble (au sens de la définition 6.4), alors* $\mathrm{X}(k)$ *est dense dans* $\mathrm{X}(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}(\mathrm{X})}$.

Démonstration. Notons V l'espace homogène et G le groupe algébrique linéaire semi-simple simplement connexe, fixons $\bar{v} \in \mathrm{V}(\overline{k})$ et notons $\mathrm{H}_{\bar{v}} \subset \mathrm{G}(\overline{k})$ son stabilisateur. Comme dans la preuve du théorème 6.1, on peut supposer que V est un ouvert de X ; comme dans la preuve du théorème 6.1, le résultat recherché est vrai lorsque $\mathrm{H}_{\bar{v}}$ est trivial et l'on procède en général par récurrence sur l'ordre de $\mathrm{H}_{\bar{v}}$ pour l'établir.

Soit $\{1\} = \mathrm{H}_0 \subset \mathrm{H}_1 \subset \cdots \subset \mathrm{H}_m = \mathrm{H}_{\bar{v}}$ une suite de sous-groupes remplissant les conditions de la définition 6.4, avec $\mathrm{H}_{m-1} \neq \mathrm{H}_m$. L'action extérieure de $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ sur $\mathrm{H}_{\bar{v}}$ induit une action de $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ sur le groupe cyclique $\mathrm{H}_{\bar{v}}/\mathrm{H}_{m-1}$ et donc aussi sur le groupe cyclique $\widehat{\mathrm{R}} = \mathrm{Hom}(\mathrm{H}_{\bar{v}}/\mathrm{H}_{m-1}, \overline{k}^*)$. Rappelons que $\mathrm{Pic}(\mathrm{V}_{\overline{k}}) = \mathrm{Hom}(\mathrm{H}_{\bar{v}}^{\mathrm{ab}}, \overline{k}^*)$ (voir § 5.2). Soit $\lambda : \widehat{\mathrm{R}} \hookrightarrow \mathrm{Pic}(\mathrm{V}_{\overline{k}})$ l'injection duale de la projection $\mathrm{H}_{\bar{v}}^{\mathrm{ab}} \twoheadrightarrow \mathrm{H}_{\bar{v}}/\mathrm{H}_{m-1}$.

Nous sommes maintenant dans la situation du § 3, dont nous reprenons les notations R, T, Q, ν (voir (3.1), (3.2)). L'application $\nu : \widehat{\mathrm{T}} \to \mathrm{Pic}(\mathrm{X}_{\overline{k}})$ est injective puisque λ l'est. Par conséquent $\widehat{\mathrm{T}}$ est sans torsion, autrement dit T est un tore. Compte tenu qu'un torseur sur X, sous T, de type ν existe dès que $\mathrm{X}(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}(\mathrm{X})} \neq \varnothing$ (voir [Sko01, Theorem 6.1.1]), le théorème 2.1 appliqué à un tel torseur montre que pour que $\mathrm{X}(k)$ soit dense dans $\mathrm{X}(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}(\mathrm{X})}$, il suffit que $\mathrm{Z}(k)$ soit dense dans $\mathrm{Z}(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}(\mathrm{Z})}$ pour toute compactification lisse Z d'un torseur sur X, sous T, de type ν.

D'après la proposition 3.1, il existe un ouvert dense $\mathrm{Z}^0 \subset \mathrm{Z}$ et un morphisme lisse $f^0 : \mathrm{Z}^0 \to \mathrm{Q}$ dont les fibres sont des torseurs sur V, sous R, de type λ. Vu la première partie de la proposition 5.2, les fibres de f^0 sont des espaces homogènes de G à stabilisateur géométrique fini. En particulier, les compactifications lisses de la fibre générique de f^0 sont rationnellement connexes et comme $\widehat{\mathrm{R}}$ est cyclique, la proposition 3.3 (ii) garantit que $f^0 \otimes_k \overline{k}$ admet une section rationnelle.

Il résulte de la seconde partie de la proposition 5.2 que les fibres de f^0 au-dessus des points rationnels de Q sont des espaces homogènes dont le stabilisateur d'un point géométrique au-dessus de $\bar{v}$ est égal, en tant que sous-groupe de $\mathrm{H}_{\bar{v}}$, à H_{m-1}. Ces stabilisateurs viennent avec une action extérieure de $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ sous laquelle la suite $\mathrm{H}_0 \subset \mathrm{H}_1 \subset \cdots \subset \mathrm{H}_{m-1}$ de sous-groupes distingués de H_{m-1} est stable, en vertu de la troisième partie de la proposition 5.2 et de la stabilité des H_i sous l'action extérieure de $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ sur $\mathrm{H}_{\bar{v}}$. Les fibres de f^0 au-dessus des points rationnels de Q sont donc des espaces homogènes de G à stabilisateur géométrique fini hyper-résoluble au sens de la définition 6.4, d'ordre strictement inférieur à celui de $\mathrm{H}_{\bar{v}}$. L'hypothèse de récurrence permet maintenant d'appliquer le théorème 4.2 (ii) à une fibration $f : \mathrm{Z}' \to \mathbf{P}^n_k$ compactifiant f^0. En effet, les fibres de $f \otimes_k \overline{k}$ au-dessus de tous les points de codimension 1 sont scindées puisque $f \otimes_k \overline{k}$ admet une section rationnelle. On conclut que $\mathrm{Z}'(k)$ est dense dans $\mathrm{Z}'(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}(\mathrm{Z}')}$ et donc que $\mathrm{Z}(k)$ est dense dans $\mathrm{Z}(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}(\mathrm{Z})}$. □

7. Zéro-cycles sur les espaces homogènes

Nous établissons ici le théorème A. Notons dorénavant k un corps de nombres.

7.1. **Réduction aux stabilisateurs finis.** Demarche et Lucchini Arteche [DLA17] ont démontré qu'une *bonne* propriété des espaces homogènes au sens de la définition rappelée ci-dessous est vérifiée par les espaces homogènes de groupes algébriques linéaires connexes si elle est vérifiée par les espaces homogènes de SL_n à stabilisateur géométrique fini.

Définition 7.1. Une propriété P des espaces homogènes de groupes algébriques linéaires connexes sur k est *bonne* si elle remplit les conditions suivantes :

(i) si V et W sont stablement birationnellement équivalents sur k, alors $\mathrm{P}(\mathrm{V}) \Leftrightarrow \mathrm{P}(\mathrm{W})$;

(ii) si $\mathrm{V} \to \mathrm{W}$ est un morphisme admettant une section, alors $\mathrm{P}(\mathrm{V}) \Rightarrow \mathrm{P}(\mathrm{W})$;

(iii) si $\mathrm{V} \to \mathrm{W}$ est un morphisme dont les fibres sont des espaces homogènes de groupes algébriques linéaires connexes semi-simples simplement connexes à stabilisateur géométrique extension d'un groupe algébrique linéaire connexe semi-simple par un groupe algébrique linéaire connexe unipotent, alors $\mathrm{P}(\mathrm{W}) \Rightarrow \mathrm{P}(\mathrm{V})$.

Ci-dessus, les symboles V et W désignent des espaces homogènes de groupes algébriques linéaires connexes sur k et le terme « morphisme » signifie « morphisme de variétés ».

Nous ne savons pas si la validité de la conjecture (E) pour les compactifications lisses d'un espace homogène est une bonne propriété des espaces homogènes sur k. La variante suivante de la conjecture (E) se comporte mieux vis-à-vis de la définition 7.1.

Définition 7.2. Une variété X irréductible, propre et lisse sur k *vérifie la propriété* (E^+) si toute variété Z irréductible, propre et lisse sur k munie d'un morphisme dominant $\mathrm{Z} \to \mathrm{X}$ remplissant les deux conditions suivantes vérifie la conjecture (E) :

(i) la fibre générique de ce morphisme est rationnellement connexe ;

(ii) il existe un ouvert dense $\mathrm{X}^0 \subset \mathrm{X}$ tel que pour toute extension finie k'/k et tout $x \in \mathrm{X}^0(k')$, la fibre Z_x vérifie la condition $(\star)$ du lemme 6.3 sur le corps de nombres k'.

Proposition 7.3. *La propriété « toute variété propre, lisse et birationnellement équivalente à* V *vérifie la propriété* (E^+) *» est une bonne propriété des espaces homogènes de groupes algébriques linéaires connexes* V *sur* k *au sens de la définition 7.1.*

Démonstration. La condition (i) de la définition 7.1 résulte du lemme 7.5 ci-dessous. La condition (ii) est un conséquence de la fonctorialité covariante du complexe (1.1). La condition (iii) vient du lemme 7.4 ci-dessous, compte tenu que d'après [Bor96, Proposition 3.4], tout morphisme $\mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ entre variétés irréductibles, propres et lisses sur k compactifiant le morphisme $\mathrm{V} \to \mathrm{W}$ qui apparaît dans (iii) satisfait aux conditions (i) et (ii) de la définition 7.2. □

Lemme 7.4. *Soit* $\mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ *un morphisme dominant entre variétés irréductibles, propres et lisses sur* k*, remplissant les conditions (i) et (ii) de la définition 7.2. Si la propriété* (E^+) *vaut pour* X*, elle vaut pour* Y *aussi.*

Démonstration. En effet, les conditions (i) et (ii) de la définition 7.2 sont stables par composition de morphismes dominants, au vu du théorème de Graber–Harris–Starr [GHS03, Theorem 1.1] et du lemme 6.3. □

Lemme 7.5. *La propriété* (E^+) *est un invariant birationnel stable des variétés irréductibles, propres et lisses sur* k*.*

Démonstration. Les conditions (i) et (ii) de la définition 7.2 et la conjecture (E) sont des invariants birationnels (utiliser le théorème des fonctions implicites et voir [Wit12, Remarque 1.1 (vi)]). Il s'ensuit que (E^+) est un invariant birationnel. Vérifions maintenant que (E^+) pour X équivaut à (E^+) pour $\mathrm{X} \times_k \mathbf{P}^1_k$. Si X satisfait (E^+), alors $\mathrm{X} \times_k \mathbf{P}^1_k$ aussi, par le lemme 7.4. Réciproquement, si $\mathrm{X} \times_k \mathbf{P}^1_k$ satisfait (E^+) et si $\mathrm{Z} \to \mathrm{X}$ est comme dans la définition 7.2, le morphisme $\mathrm{Z} \times_k \mathbf{P}^1_k \to \mathrm{X} \times_k \mathbf{P}^1_k$ vérifie les conditions (i) et (ii) de cette définition, donc la conjecture (E) vaut pour $\mathrm{Z} \times_k \mathbf{P}^1_k$, donc pour Z puisque le groupe de Brauer et le groupe de Chow des zéro-cycles sont des invariants stables. □

La proposition 7.3 nous permet d'appliquer [DLA17, Théorème 5.2] à la propriété (E^+). Ainsi, pour établir le théorème A, il nous reste seulement à montrer que les compactifications lisses d'espaces homogènes de SL_n à stabilisateur géométrique fini vérifient (E^+).

7.2. **Réduction aux stabilisateurs finis résolubles.** Réduisons-nous maintenant aux espaces homogènes dont le stabilisateur géométrique est fini d'ordre une puissance d'un nombre premier et est donc *a fortiori* un groupe fini résoluble.

Proposition 7.6. *Soit* X *une variété irréductible, propre et lisse sur* k*. Supposons que pour tout nombre premier* p*, il existe une variété irréductible, propre et lisse* Y *sur* k *vérifiant la propriété* (E^+) *et un morphisme* $\mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ *génériquement fini de degré premier à* p*. Alors* X *vérifie la propriété* (E^+)*.*

Démonstration. Soit Z une variété irréductible, propre et lisse sur k munie d'un morphisme dominant $\mathrm{Z} \to \mathrm{X}$ vérifiant les conditions de la définition 7.2. Soit p un nombre premier. Soit $\mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ un morphisme comme dans l'énoncé de la proposition. Soit Z' une désingularisation de la composante irréductible de $\mathrm{Z} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{Y}$ qui domine Y. La variété Z' vérifie (E) puisque Y vérifie (E^+). La fonctorialité covariante et contravariante du groupe de Chow et du groupe de Brauer (voir [Ful98, Chapter 1, Chapter 8], [CTSD94, § 1.1]) permet d'en déduire que le groupe d'homologie du complexe (1.1) associé à Z est annulé par le degré du morphisme génériquement fini $\mathrm{Z}' \to \mathrm{Z}$, qui est un entier premier à p. Ainsi, ce groupe d'homologie est un groupe abélien de torsion première à p, pour tout p ; il est donc nul. □

La proposition 5.5 combinée à la proposition 7.6 ci-dessus montre que la propriété (E^+), sur toutes les extensions finies de k, pour les compactifications lisses d'espaces homogènes de SL_n à stabilisateur géométrique fini d'ordre une puissance d'un nombre premier implique la propriété (E^+), sur k, pour les compactifications lisses d'espaces homogènes de SL_n à stabilisateur géométrique fini.

7.3. **Passage aux torseurs universels.** Nous appliquons ici la méthode de la descente à l'étude des zéro-cycles sur les variétés rationnellement connexes et vérifions plus précisément qu'afin d'établir la propriété (E^+) pour une telle variété, il est loisible, quitte à effectuer une extension des scalaires, de passer à ses torseurs universels.

Proposition 7.7. *Soit* X *une variété propre, lisse et rationnellement connexe, sur* k*. Si pour toute extension finie* k'/k*, la propriété* (E^+) *vaut pour les compactifications lisses des torseurs universels de la variété* $\mathrm{X} \otimes_k k'$ *sur* k'*, elle vaut pour* X *aussi.*

Démonstration. Fixons une variété irréductible, propre et lisse Z sur k munie d'un morphisme dominant $\mathrm{Z} \to \mathrm{X}$ vérifiant les conditions de la définition 7.2. Comme X et la fibre générique de ce morphisme sont rationnellement connexes, la variété Z est rationnellement connexe (voir [GHS03, Theorem 1.1]). D'après [HW16, Theorem 8.3 (3)] appliqué à la fibration triviale $\mathrm{Z} \times_k \mathbf{P}^1_k \to \mathbf{P}^1_k$, il suffit donc, pour vérifier la conjecture (E) pour Z, de prouver que pour toute extension finie k'/k, l'image de $\mathrm{Z}(\mathbf{A}_{k'})^{\mathrm{Br}(\mathrm{Z}\otimes_k k')}$ dans $\mathrm{CH}_{0,\mathbf{A}}^{\widehat{}}(\mathrm{Z}\otimes_k k')$ est contenue dans l'image de $\mathrm{CH}_0^{\widehat{}}(\mathrm{Z} \otimes_k k')$ dans ce même groupe.

Quitte à remplacer k par k', on peut supposer que $k = k'$. Fixons $(\mathrm{P}_v)_{v\in\Omega} \in \mathrm{Z}(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}(\mathrm{Z})}$. Comme $\mathrm{Z}(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}(\mathrm{Z})} \neq \varnothing$, on a $\mathrm{X}(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}(\mathrm{X})} \neq \varnothing$, par conséquent X admet un torseur universel (voir [Sko01, Proposition 6.1.4]). D'après le théorème 2.1 appliqué au torseur sur Z obtenu par changement de base, il existe un torseur universel $\mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ et un point adélique $(\mathrm{P}'_v)_{v\in\Omega} \in (\mathrm{Z} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{Y})(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(\mathrm{Z}\times_{\mathrm{X}}\mathrm{Y})}$ relevant $(\mathrm{P}_v)_{v\in\Omega}$.

Soit Y' une compactification lisse de Y. Soit Z' une compactification lisse de $\mathrm{Z} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{Y}$ telle que les projections $\mathrm{Z} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{Y} \to \mathrm{Z}$ et $\mathrm{Z} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{Y} \to \mathrm{Y}$ s'étendent en des morphismes $p : \mathrm{Z}' \to \mathrm{Z}$ et $q : \mathrm{Z}' \to \mathrm{Y}'$. Le morphisme q remplit les conditions (i) et (ii) de la définition 7.2. Comme par hypothèse la variété Y' vérifie la propriété (E^+), la variété Z' vérifie donc (E) : l'image de $(\mathrm{P}'_v)_{v\in\Omega}$ dans $\widehat{\mathrm{CH}_{0,\mathbf{A}}}(\mathrm{Z}')$ appartient à l'image de $\widehat{\mathrm{CH}_0}(\mathrm{Z}')$ dans ce même groupe. En appliquant p_*, on conclut que l'image de $(\mathrm{P}_v)_{v\in\Omega}$ dans $\widehat{\mathrm{CH}_{0,\mathbf{A}}}(\mathrm{Z})$ provient de $\widehat{\mathrm{CH}_0}(\mathrm{Z})$. □

Remarque 7.8. La proposition 7.7 resterait vraie (avec la même preuve, qui d'ailleurs se simplifierait quelque peu) si dans son énoncé on remplaçait (E^+) par (E).

7.4. Compatibilité de la propriété (E^+) aux fibrations.

Proposition 7.9. *Soient* X *une variété irréductible, propre et lisse sur k et $f : \mathrm{X} \to \mathbf{P}^n_k$ un morphisme dominant de fibre générique rationnellement connexe, pour un entier $n \geq 1$. Si la propriété* (E^+) *vaut pour les fibres de f au-dessus des points fermés d'un ouvert dense de $\mathbf{P}^n_k$, elle vaut pour* X *aussi.*

Démonstration. Soient $\mathrm{Z} \to \mathrm{X}$ et $\mathrm{X}^0 \subset \mathrm{X}$ comme dans la définition 7.2. Notons $g : \mathrm{Z} \to \mathbf{P}^n_k$ la composée de ce morphisme avec f. Quitte à rétrécir X^0, on peut supposer $\mathrm{Z} \to \mathrm{X}$ lisse au-dessus de X^0. Soit $\mathrm{U} \subset \mathbf{P}^n_k$ un ouvert dense au-dessus duquel f et g sont lisses et au-dessus des points fermés duquel les fibres de f vérifient (E^+). Quitte à rétrécir U, on peut supposer l'ouvert $\mathrm{X}^0 \cap f^{-1}(u)$ dense dans $f^{-1}(u)$ pour tout $u \in \mathrm{U}$. Les fibres de g au-dessus des points fermés de U vérifient alors la conjecture (E). D'autre part, la fibre générique de g est rationnellement connexe, d'après Graber–Harris–Starr [GHS03, Theorem 1.1]. Que Z vérifie la conjecture (E) résulte donc du théorème 4.7 appliqué à g. □

7.5. Fin de la preuve du théorème A. Montrons, par récurrence sur l'ordre du stabilisateur, que pour tout corps de nombres k, toute compactification lisse X d'un espace homogène V de SL_n sur k à stabilisateur géométrique fini résoluble vérifie la propriété (E^+). Au vu des §§ 7.1–7.2, cela terminera la preuve du théorème A.

Lorsque le stabilisateur est trivial, la variété X est rationnelle sur k puisque l'ensemble $\mathrm{H}^1(k, \mathrm{SL}_n)$ est un singleton (théorème de Hilbert 90). Dans ce cas, la propriété (E^+) pour X est donc équivalente, par le lemme 7.5, à la propriété (E^+) pour le point ; or cette dernière est bien vraie (voir [Lia13, Proposition 3.2.3] ou appliquer [HW16, Theorem 8.3 (3), Lemma 8.2] à la fibration triviale $\mathrm{Z} \times_k \mathbf{P}^1_k \to \mathbf{P}^1_k$).

Lorsque le stabilisateur n'est pas trivial, on applique la proposition 7.7 : quitte à effectuer une extension des scalaires, il suffit d'établir (E^+) pour une compactification lisse de chaque torseur universel de X. D'après le corollaire 3.2 et le corollaire 5.4, chaque torseur universel de X admet une compactification lisse munie d'un morphisme vers un espace projectif dont la fibre générique est un espace homogène de SL_n à stabilisateur géométrique fini résoluble d'ordre strictement inférieur à l'ordre du stabilisateur géométrique de V. L'hypothèse de récurrence et la proposition 7.9 permettent de conclure la démonstration.

Remarque 7.10. Il est naturel de se demander si une variante des arguments employés dans la preuve du théorème A permettrait d'établir l'énoncé suivant, analogue, pour les zéro-cycles, du problème de Galois inverse : si Γ est un groupe fini et k un corps de nombres, il existe un entier $n \geq 1$ et des extensions finies $k_1, \ldots, k_n$ de k tels que les degrés $[k_i : k]$ soient premiers entre eux dans leur ensemble et que pour chaque $i \in \{1, \ldots, n\}$, il existe une extension finie galoisienne de k_i de groupe de Galois isomorphe à Γ. Cependant, cet énoncé est déjà connu, même dans sa version « régulière » (voir [CT00, Remark 3, p. 367]). Au demeurant, il se démontre de façon élémentaire. En effet, il n'est pas difficile de vérifier, par une récurrence sur la dimension, que pour tout sous-ensemble hilbertien H d'une variété X lisse et géométriquement irréductible sur un corps de nombres, tout zéro-cycle sur X est rationnellement équivalent à un zéro-cycle supporté sur H ; en particulier, le sous-ensemble hilbertien de $X = SL_n/\Gamma$ associé au revêtement $SL_n \to X$ contient un zéro-cycle de degré 1.

Références

[BDH13] M. Borovoi, C. Demarche, et D. Harari, *Complexes de groupes de type multiplicatif et groupe de Brauer non ramifié des espaces homogènes*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **46** (2013), no. 4, 651–692.

[Bog87] F. A. Bogomolov, *The Brauer group of quotient spaces of linear representations*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **51** (1987), no. 3, 485–516, 688.

[Bog89] ______, *Brauer groups of the fields of invariants of algebraic groups*, Mat. Sb. **180** (1989), no. 2, 279–293.

[Bor96] M. Borovoi, *The Brauer-Manin obstructions for homogeneous spaces with connected or abelian stabilizer*, J. reine angew. Math. **473** (1996), 181–194.

[Cao16] Y. Cao, *Approximation forte pour les variétés avec une action d'un groupe linéaire*, à paraître, Compositio Mathematica, arXiv:1604.03386, 2016.

[CDX16] Y. Cao, C. Demarche, et F. Xu, *Comparing descent obstruction and Brauer-Manin obstruction for open varieties*, arXiv:1604.02709, 2016.

[CT95] J.-L. Colliot-Thélène, *L'arithmétique du groupe de Chow des zéro-cycles*, J. Théor. Nombres Bordeaux **7** (1995), no. 1, 51–73, Les Dix-huitièmes Journées Arithmétiques (Bordeaux, 1993).

[CT00] ______, *Rational connectedness and Galois covers of the projective line*, Ann. of Math. (2) **151** (2000), no. 1, 359–373.

[CT03] ______, *Points rationnels sur les fibrations*, Higher dimensional varieties and rational points (Budapest, 2001), Bolyai Soc. Math. Stud., vol. 12, Springer, Berlin, 2003, pp. 171–221.

[CT05] ______, *Un théorème de finitude pour le groupe de Chow des zéro-cycles d'un groupe algébrique linéaire sur un corps p-adique*, Invent. math. **159** (2005), no. 3, 589–606.

[CTHS03] J.-L. Colliot-Thélène, D. Harari, et A. N. Skorobogatov, *Valeurs d'un polynôme à une variable représentées par une norme*, Number theory and algebraic geometry, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 303, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003, pp. 69–89.

[CTK06] J.-L. Colliot-Thélène et B. È. Kunyavskiĭ, *Groupe de Picard et groupe de Brauer des compactifications lisses d'espaces homogènes*, J. Algebraic Geom. **15** (2006), no. 4, 733–752.

[CTPS16] J.-L. Colliot-Thélène, A. Pál, et A. N. Skorobogatov, *Pathologies of the Brauer-Manin obstruction*, Math. Z. **282** (2016), no. 3-4, 799–817.

[CTS81] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, *On the Chow groups of certain rational surfaces : a sequel to a paper of S. Bloch*, Duke Math. J. **48** (1981), no. 2, 421–447.

[CTS87] ______, *La descente sur les variétés rationnelles. II*, Duke Math. J. **54** (1987), no. 2, 375–492.

[CTS00] J.-L. Colliot-Thélène et A. N. Skorobogatov, *Descent on fibrations over $\mathbf{P}^1_k$ revisited*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **128** (2000), no. 3, 383–393.

[CTS07] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, *The rationality problem for fields of invariants under linear algebraic groups (with special regards to the Brauer group)*, Algebraic groups and homogeneous spaces, Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math., Tata Inst. Fund. Res., Mumbai, 2007, pp. 113–186.

[CTS13] J.-L. Colliot-Thélène et A. N. Skorobogatov, *Good reduction of the Brauer–Manin obstruction*, Trans. Amer. Math. Soc. **365** (2013), no. 2, 579–590.

[CTSD94] J.-L. Colliot-Thélène et Sir Peter Swinnerton-Dyer, *Hasse principle and weak approximation for pencils of Severi-Brauer and similar varieties*, J. reine angew. Math. **453** (1994), 49–112.

[Dem10] C. Demarche, *Groupe de Brauer non ramifié d'espaces homogènes à stabilisateurs finis*, Math. Ann. **346** (2010), no. 4, 949–968.

[DLA17] C. Demarche et G. Lucchini Arteche, *Le principe de Hasse pour les espaces homogènes : réduction au cas des stabilisateurs finis*, arXiv:1704.08646, 2017.

[DLAN17] C. Demarche, G. Lucchini Arteche, et D. Neftin, *The Grunwald problem and approximation properties for homogeneous spaces*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **67** (2017), no. 3, 1009–1033.

[DSW15] U. Derenthal, A. Smeets, et D. Wei, *Universal torsors and values of quadratic polynomials represented by norms*, Math. Ann. **361** (2015), no. 3-4, 1021–1042.

[Ful98] W. Fulton, *Intersection theory*, seconde éd., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, vol. 2, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[GHS03] T. Graber, J. Harris, et J. Starr, *Families of rationally connected varieties*, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), no. 1, 57–67.

[Har94] D. Harari, *Méthode des fibrations et obstruction de Manin*, Duke Math. J. **75** (1994), no. 1, 221–260.

[Har97] ———, *Flèches de spécialisations en cohomologie étale et applications arithmétiques*, Bull. Soc. Math. France **125** (1997), no. 2, 143–166.

[Har07] ———, *Quelques propriétés d'approximation reliées à la cohomologie galoisienne d'un groupe algébrique fini*, Bull. Soc. Math. France **135** (2007), no. 4, 549–564.

[Har08] ———, *Le défaut d'approximation forte pour les groupes algébriques commutatifs*, Algebra & Number Theory **2** (2008), no. 5, 595–611.

[HBS02] R. Heath-Brown et A. Skorobogatov, *Rational solutions of certain equations involving norms*, Acta Math. **189** (2002), no. 2, 161–177.

[HS13] D. Harari et A. N. Skorobogatov, *Descent theory for open varieties*, Torsors, étale homotopy and applications to rational points, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 405, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2013, pp. 250–279.

[HW16] Y. Harpaz et O. Wittenberg, *On the fibration method for zero-cycles and rational points*, Ann. of Math. (2) **183** (2016), no. 1, 229–295.

[Kol96] J. Kollár, *Rational curves on algebraic varieties*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), vol. 32, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[KS86] K. Kato et S. Saito, *Global class field theory of arithmetic schemes*, Applications of algebraic K-theory to algebraic geometry and number theory, Part I (Boulder, Colo., 1983), Contemp. Math., vol. 55, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986, pp. 255–331.

[LA14] G. Lucchini Arteche, *Approximation faible et principe de Hasse pour des espaces homogènes à stabilisateur fini résoluble*, Math. Ann. **360** (2014), no. 3-4, 1021–1039.

[LA17a] ———, *The unramified Brauer group of homogeneous spaces with finite stabilizer*, arXiv:1709.01170, 2017.

[LA17b] ———, *Weak approximation for homogeneous spaces : reduction to the case with finite stabilizer*, Math. Res. Lett. **24** (2017), no. 1, 1–19.

[Lia13] Y. Liang, *Arithmetic of* 0*-cycles on varieties defined over number fields*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **46** (2013), no. 1, 35–56.

[Man71] Yu. I. Manin, *Le groupe de Brauer-Grothendieck en géométrie diophantienne*, Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), Tome 1, Gauthier-Villars, Paris, 1971, pp. 401–411.

[Neu79] J. Neukirch, *On solvable number fields*, Invent. math. **53** (1979), no. 2, 135–164.

[NSW08] J. Neukirch, A. Schmidt, et K. Wingberg, *Cohomology of number fields*, seconde éd., Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 323, Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[PR94] V. Platonov et A. Rapinchuk, *Algebraic groups and number theory*, Pure and Applied Mathematics, vol. 139, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1994.

[Ros57] M. Rosenlicht, *Some rationality questions on algebraic groups*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **43** (1957), 25–50.

[Sal84] D. J. Saltman, *Noether's problem over an algebraically closed field*, Invent. math. **77** (1984), no. 1, 71–84.

[San81] J.-J. Sansuc, *Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres*, J. reine angew. Math. **327** (1981), 12–80.

[Ser94] J-P. Serre, *Cohomologie galoisienne*, cinquième éd., Lecture Notes in Mathematics, vol. 5, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[Ser98] ———, *Représentations linéaires des groupes finis*, cinquième éd., Hermann, Paris, 1998.

[Ser08] ———, *Topics in Galois theory*, seconde éd., Research Notes in Mathematics, vol. 1, A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 2008.

[Sko90] A. N. Skorobogatov, *On the fibration method for proving the Hasse principle and weak approximation*, Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1988–1989, Progr. Math., vol. 91, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, pp. 205–219.

[Sko96] ———, *Descent on fibrations over the projective line*, Amer. J. Math. **118** (1996), no. 5, 905–923.

[Sko01] ———, *Torsors and rational points*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 144, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[Vos98] V. E. Voskresenskiĭ, *Algebraic groups and their birational invariants*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 179, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[Wan48] S. Wang, *A counter-example to Grunwald's theorem*, Ann. of Math. (2) **49** (1948), 1008–1009.

[Wei16] D. Wei, *Open descent and strong approximation*, arXiv:1604.00610, 2016.

[Wit12] O. Wittenberg, *Zéro-cycles sur les fibrations au-dessus d'une courbe de genre quelconque*, Duke Math. J. **161** (2012), no. 11, 2113–2166.

[Wit16] ———, *Rational points and zero-cycles on rationally connected varieties over number fields*, à paraître, actes du congrès AMS Summer Institute in Algebraic Geometry, Salt Lake City, 2016.

Institut Galilée, Université Paris 13, 99 avenue Jean-Baptiste Clément, 93430 Villetaneuse, France

Email address: `harpaz@math.univ-paris13.fr`

Département de mathématiques et applications, École normale supérieure, 45 rue d'Ulm, 75230 Paris Cedex 05, France

Email address: `wittenberg@dma.ens.fr`