

Exercice 1.

$\frac{25}{25}$ f endomorphisme nilpotent de \mathbb{R}^3 .

Q1. p l'indice de nilpotence de f .

$\frac{0,5}{0,5}$ Alors $f^p = f^{p-2+2}$

f^2 est toujours un endomorphisme de \mathbb{R}^3 .

si $p \leq 2$;

$$f^2 = \tilde{0} \quad \checkmark$$

si $p > 2$;

$$(f^2)^{\frac{p}{2}} = f^{p^2} = \tilde{0} \quad (p \leq 3) \quad \checkmark$$

$\Rightarrow f^2$ est nilpotente.

Q2. $\dim \mathbb{R}^3 = 3$. Il y a 3 tableaux de Young possibles pour un endomorphisme nilpotent.

Tableau de Young



~~Tableau~~ Forme de Jordan associée.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} (J_3)$$

$$J_2 \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_1 \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J_2$$

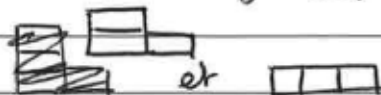
Q3. f^2 est nilpotente d'indice :

• soit $\tilde{1}$ (i.e. f^2 est nulle) (si $p=1$ ou $p=2$)

• soit $\tilde{2}$ (si $p=3$)

$\Rightarrow f^2$ est nilpotente d'indice 1 ou 2

Les formes de Jordan possible pour f^2 sont associées aux tableaux de Young



et



\checkmark