Examen

Le 13 décembre 2022
Durée : 3 heures

La note tiendra compte du soin et de la qualité de l'expression écrite.
Les réponses non argumentées ne rapportent aucun point.
Les calculatrices ne sont pas autorisées.
Tous les exercices sont indépendants. Un barême très approximatif est indiqué.

1 Questions de cours (11 points)

Question 1. (1 point)
Soit E un espace vectoriel réel, et $L_2(E)$ l'espace des formes bilinéaires sur E. Reformulez la phrase suivante en utilisant un formalisme mathématique.
"Toute forme bilinéaire est somme d'une forme bilinéaire symétrique et d'une forme bilinéaire antisymétrique."
Vous ferez attention aux quantificateurs. Les propriétés de "symétrie" et "antisymétrie" doivent être explicitées.

Question 2. (5 points)
Répondez par vrai ou faux et argumentez à l'aide d'une démonstration ou un contre-exemple.

1. Soient $O = (0,0,0)$, $A = (1,0,0)$, $B = (0,1,0)$ et $C = (0,0,1)$. Il existe une unique transformation affine de $\mathbb{R}^3$ qui envoie le triangle OAB sur le triangle ABC (dans cet ordre).
2. Soit E un espace affine de dimension 2, r_θ une rotation affine d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ et h une homothétie affine de rapport 2. Alors $h \circ r_\theta \circ h^{-1}$ est une rotation affine.
3. Soient E un espace affine et $h : E \to E$ une homothétie affine. Si F est un sous-espace affine de E, alors F et $h(F)$ sont parallèles.
4. Soient q, q' deux formes quadratiques sur $\mathbb{R}^2$. Si q et q' sont de signature $(1,1)$, alors $q + q'$ est de signature $(1,1)$.
5. Soit φ une forme bilinéaire sur une espace vectoriel E et q la forme quadratique associée. Soit $\vec{u} \in E$. Alors $q(\vec{u}) = 0$ si et seulement si $\varphi(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ pour tout $\vec{v} \in E$.

Question 3. (2 points)
On se place dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$. Soient $\vec{v}_1 = (1,1,1)$, $\vec{v}_2 = (2,0,-3)$ et $\vec{v}_3 = (-2,-1,1)$.

1. Soit P le plan passant par $a = (1,0,1)$ et dirigé par $\mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$. En expliquant votre démarche, donnez une représentation cartésienne de P.
2. Soit Δ la droite passant par $b = (2,1,3)$ et dirigée par $\vec{v}_3$. En expliquant votre démarche, donnez une représentation cartésienne de Δ.

Question 4. (3 points)
Parmi les applications suivantes de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, lesquelles sont des formes bilinéaires ? Chaque réponse est à justifier rigoureusement.

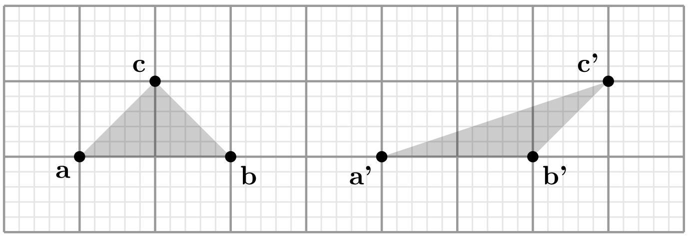
1. $\varphi_1(\vec{u}, \vec{v}) = u_1^2 + 2u_1v_1 + v_1^2$;
2. $\varphi_2(\vec{u}, \vec{v}) = (u_1 - 2u_2)(v_2 - v_1)$;
3. $\varphi_3(\vec{u}, \vec{v}) = u_1v_2 + u_2v_1 + u_1 + v_1$.

On se donne la forme bilinéaire $\varphi_4(\vec{u}, \vec{v}) = -u_1v_1 + u_1v_2 - 2u_2v_1 + 2u_2v_2$ définie pour $\vec{u}$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$.

4. Écrivez φ_4 comme somme d'une forme bilinéaire symétrique et d'une forme bilinéaire antisymétrique.
5. Explicitez la forme quadratique associée à φ_4.

2 Exercices (9 points)

Exercice 1. (3,5 points)
On se place dans l'espace affine $\mathbb{R}^2$.



1. Pourquoi existe-t-il une unique application affine f qui envoie les points a, b, c sur les points a', b', c' dans cet ordre ?
2. En vous aidant d'un dessin, montrez que $\vec{f}$ a pour matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{ab}, \vec{ac})$.
3. Dans ce qui suit, les coordonnées de points sont prises dans le repère (a, b, c). Soit x un point de coordonnées X. Soit $y = f(x)$ son image par f, de coordonnées Y. Montrez que $Y = AX + B$, où B est à expliciter.
4. Déduisez de la question précédente les coordonnées d'un point fixe de f.
5. Déterminez les valeurs propres et les espaces propres de A. Déduisez-en que l'ensemble $\{m \in \mathbb{R}^2 : f(m) = m\}$ est une droite affine dont vous préciserez la direction.
6. (*) Soit t une translation. L'ensemble des points fixes de la transformation affine $t \circ f$ est-il toujours une droite affine ?

Exercice 2. (3 points)
Soit φ une forme bilinéaire sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$; on note A la matrice de φ dans la base canonique. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un endomorphisme ; on note M la matrice de f dans la base canonique.

1. Soient $\vec{u}$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, de coordonnées respectives U et V dans la base canonique. Exprimez $\varphi(\vec{u}, \vec{v})$ à l'aide de U et V.
2. Donnez l'expression matricielle de $\varphi(f(\vec{u}), f(\vec{v}))$, et déduisez-en que $(\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \varphi(f(\vec{u}), f(\vec{v}))$ est une forme bilinéaire.
3. Soit q la forme quadratique associée à φ. Justifiez que $q \circ f \ : \ \vec{u} \mapsto q(f(\vec{u}))$ est une forme quadratique.
4. Montrez que si f est inversible, alors $q \circ f$ et q ont la même signature.
5. Le résultat de la question précédente reste-t-il vrai si f n'est pas inversible ?´

Exercice 3. (2,5 points)
Soit $q(\vec{u}) := 2xy + 2xz + 2yz$, où $\vec{u} = (x, y, z)$, une forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$. Soit A la matrice symétrique associée à q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. En expliquant votre méthode, explicitez la matrice A.
2. On pose $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Calculez AU, AV et AW.
3. Quelle est la signature de q ?
4. À l'aide de l'algorithme de réduction de Gauss, donnez une forme réduite de q.
5. (**) Dessinez le cône isotrope de q.