Chapitre 2

Produits scalaires et isométries vectorielles

Ces notes ont été rédigées par Mélanie GUENAIS (2020-2022), et reprises par Damien THOMINE (2022-2023).

Ce texte contient de nombreux passages en gris. Ceux-ci pourront-être passé en première lecture. Ces passages contiennent cependant de nombreuses démonstrations ; s'il n'est pas important (ni souhaitable) de les apprendre, cela peut être un exercice instructif d'essayer de les faire soi-même.

Introduction et cadre de travail

Il s'agit d'étudier dans ce chapitre les ensembles de matrices liés à un produit scalaire. Cette étude sera complétée dans le chapitre suivant concernant plus généralement les formes bilinéaires et quadratiques. Dans un second temps, il s'agira de décrire du point de vue algébrique et géométrique les classes d'isométries et d'isométries affines.

- ▷ Dans tout le chapitre, E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$
- ▷ E est de dimension finie sur $\mathbb{R}$ et on note $\dim E = n$.
- ▷ De manière générale, $\langle\ ,\ \rangle$ désigne un produit scalaire sur E.

I Produit scalaire et représentations matricielles

I.1 Définitions générales - rappels

On donne la définition générale d'un produit scalaire, valable sur tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension quelconque.

Définition I.1 (Produit scalaire)**.**
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On appelle **produit scalaire** *sur E toute application φ de $E \times E$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que :*

- ▷ *φ est bilinéaire : pour tout $(x, y, z) \in E^3$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$,*

$$\varphi(\lambda x + y, z) = \lambda\varphi(x, z) + \varphi(y, z) \quad \textit{et} \quad \varphi(z, \lambda x + y) = \lambda\varphi(z, x) + \varphi(z, y)$$

▷ *φ est symétrique : $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$ pour tous x, $y \in E$.*

▷ *φ est définie : pour tout $x \in E$, si $\varphi(x,x) = 0$ alors $x = 0$.*

▷ *φ est positive : $\varphi(x,x) \geq 0$ pour tout $x \in E$.*

Exemple I.2.

Le ***produit scalaire canonique*** *φ sur $E = \mathbb{R}^n$ est défini par :*

$$\varphi(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \forall\ x,y \in \mathbb{R}^n.$$

On dispose de même d'un produit scalaire φ sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ défini par :

$$\varphi(X,Y) := X^T Y = \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i \quad \forall\ X,Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

Remarque I.3.

On aurait pu remplacer :

▷ *La première condition par : φ est linéaire à gauche ;*

▷ *les 2 dernières conditions par : $\varphi(x,x) > 0$ pour tout $x \in E \setminus \{0\}$.*

Ce qu'il faut savoir faire :

▷ Connaître et ré-écrire les définitions.

▷ Montrer qu'une application donnée est un produit scalaire.

▷ Justifier la remarque ci-dessus.

Notation : Le produit scalaire de deux vecteurs x et y sera le plus souvent noté $\langle x, y\rangle$.

I.2 Matrice associée à un produit scalaire

On s'intéresse, comme au chapitre précédent, au lien entre produit scalaire et matrice lorsque E est un espace vectoriel de dimension finie. Comme d'habitude, il faut choisir une base. Cette base étant donnée, on peut représenter un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de façon unique par une matrice.

Propriété I.4 (Ecriture matricielle d'un produit scalaire dans une base)**.**

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathscr{B}$ une base de E et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire de E. Pour tous $(x,y) \in E^2$, on note X et Y leur matrice de coordonnées dans $\mathscr{B}$. Alors il existe une unique matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tous x, $y \in E$,

$$\langle x, y\rangle = (X^T)AY. \tag{2.1}$$

En notant $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in\{1;n\}^2}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, cette égalité peut s'écrire :

$$\langle x, y\rangle = \sum_{(i,j)\in\{1;n\}^2} a_{i,j} x_i y_j. \tag{2.2}$$

Preuve : Soit e_i le vecteur dont la i-ème coordonnée est 1, et les autres coordonnées sont nulles. On pose $a_{i,j} := \langle \delta_i, \delta_j \rangle$, et A la matrice $(a_{i,j})_{(i,j)\in\{1;n\}^2}$. Alors

$$\langle x, y\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \langle e_i, e_j\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} x_i y_j.$$

Une telle matrice A existe. De plus, si B est telle que $\langle x, y\rangle = (X^T)BY$ pour tous vecteurs x, y, alors $a_{i,j} = \langle e_i, e_j\rangle = B_{i,j}$ pour tous i, j, donc $B = A$: une telle matrice A est unique. □

Exercice 1. Quelle est la matrice associée au produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$?

Remarque I.5.

La propriété précédente associe à un produit scalaire donné une matrice. On peut étudier la réciproque : fixons une base $\mathscr{B}$ dans E et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, et définissons $\langle\cdot,\cdot\rangle$ par l'Équation (2.2). Alors :

- ▷ *$\langle\cdot,\cdot\rangle$ est une application bilinéaire de E dans E.*
- ▷ *$\langle\cdot,\cdot\rangle$ est symétrique si et seulement si A est symétrique.*
- ▷ *$\langle\cdot,\cdot\rangle$ n'est pas toujours défini positif.*

Exercice 2. Justifier chacun des points de la remarque précédente.

La description complète de ces matrices est l'objet d'un chapitre futur. Pour l'instant, nous énoncerons une propriété partielle qui donne des conditions nécessaires pour représenter la matrice associée à un produit scalaire :

Propriété I.6.

Si A est la matrice associée à un produit scalaire, alors :

- ▷ *A est une matrice symétrique : $A^T = A$.*
- ▷ *A est inversible.*
- ▷ *Les valeurs propres de A sont réelles et strictement positives.*

Preuve : Commençons par le premier point. Nous reprenons les notations de la Propriete I.4, pour tous x, $y \in E$, le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ étant symétrique [1],

$$X^T AY = \langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle = Y^T AX.$$

Or $Y^T AX$ est un réel, donc $Y^T AX = (Y^T AX)^T = X^T A^T Y$. Ainsi, $X^T A^T Y = X^T AY$ pour tous X, Y. La matrice représentant un produit scalaire étant unique, $A^T = A$.

Le second point découle du troisième : A est inversible si et seulement si 0 n'est pas une valeur propre, ce qui est le cas si toutes les valeurs propres sont strictement positives.

1. On peut aussi, en reprenant les notations de la démonstration de la Propriete I.4, montrer directement que $a_{j,i} = \langle e_j, e_i\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = a_{i,j}$.

Passons au troisième point. Commençons par montrer que les valeurs propres réelles sont strictement positives. Soient λ une valeur propre réelle de A, $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur colonne propre associé, et $x \in E$ le vecteur de coordonnées X. Alors

$$\langle x, x\rangle = X^T AX = X^T(\lambda X) = \lambda X^T X.$$

Or $X^T X = \sum_{i=1}^n x_i^2 > 0$ et $\langle x, x\rangle > 0$, donc $\lambda > 0$.

Maintenant, montrons que toute les valeurs propres de A sont réelles. On fait agir A sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Soient λ une valeur propre de A et $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur colonne propre associé. Alors

$$\overline{X}^T AX = \lambda\overline{X}^T X.$$

Mais, de plus, la matrice A étant réelle, $A\overline{X} = \overline{AX}$. Par conséquent,

$$\overline{X}^T AX = \overline{X}^T A^T X = (A\overline{X})^T X = (\overline{AX})^T X = (\overline{\lambda X})^T X = \overline{\lambda X}^T X.$$

Ainsi, $\lambda\overline{X}^T X = \overline{\lambda X}^T X$. Or $\overline{X}^T X = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \neq 0$, donc $\lambda \neq \overline{\lambda}$. La valeur propre λ est donc réelle.
$\square$

Notation : On note $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques réelles :

$$\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R});\ M^T = M\}$$

Exercice 3. $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Est-il stable par multiplication ?

II Orthogonalité et isométries

On note dans cette section $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un produit scalaire sur E. Lorsque la base n'est pas précisée, elle est supposée orthonormée.

On rappelle qu'un produit scalaire définit une norme appelée ***norme euclidienne***, donnée pour tout $x \in E$ par $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$.

II.1 Orthogonaux et coordonnées en base orthonormée

Définition II.1 (Rappel : sous-espace orthogonal)**.**
Soit $F \subset E$ non vide. On appelle **orthogonal** *de F le sous-espace vectoriel $F^\perp$ défini par :*

$$F^\perp = \{x \in E;\ \forall f \in F\ \ \langle f, x\rangle = 0\} = \bigcap_{f\in F}\{x \in E;\ \langle f, x\rangle = 0\}.$$

De plus, si F est un sous-espace vectoriel de E, alors $F \oplus F^\perp = E$.

Propriété II.2.
Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors $F \oplus F^\perp = E$.

Preuve : Montrons d'abord de F et $F^{\perp}$ sont transverses. Soit $x \in F \cap F^{\perp}$. Alors $\langle x, y \rangle = 0$ pour youy $f \in F$ (car $x \in F^{\perp}$). En choisissant en particulier $f = x$, on obtient $\langle x, x \rangle = 0$, et donc $x = 0$ car le produit scalaire est défini.

Montrons ensuite que $F + F^{\perp} = E$. Soient $k = \dim(F)$ et $(e_1, \cdots, e_k)$ une base de F. Soit u l'application linéaire

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R}^k \\ x & \mapsto & (\langle e_1, x \rangle, \cdots, \langle e_k, x \rangle) \end{array} \right. .$$

Alors $F^{\perp} = \mathrm{Ker}(u)$. De plus, par le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = n - \mathrm{rg}(u) \geq n - k$. Donc, comme F et $F^{\perp}$ sont transverses,

$$n \geq \dim(F + F^{\perp}) = \dim(F) + \dim(F^{\perp}) \geq k + (n-k) = n.$$

Par conséquent, $\dim(F + F^{\perp}) = n$ et $F + F^{\perp} = E$. □

On démontre au passage un forme de dualité entre un sous-espace vectoriel et son orthogonal :

Propriété II.3.

Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors $(F^{\perp})^{\perp} = F$.

Preuve : Posons $k = \dim(F)$. Alors $\dim(F^{\perp}) = n - k$, donc $\dim((F^{\perp})^{\perp}) = n - (n-k) = k$.

Soit $x \in F$. Soit $f \in F^{\perp}$. Alors $\langle x, f \rangle = \langle f, x \rangle = 0$. Donc $\langle x, f \rangle = 0$ pour tout $f \in F^{\perp}$, donc $x \in (F^{\perp})^{\perp}$. On a donc montré que $F \subset (F^{\perp})^{\perp}$, et ces deux sous-espaces coincident par égalité des dimensions. □

Le procédé d'orthogonalisation de Gramm-Schmidt, sur lequel on reviendra bientôt, est un algorithme qui permet de construire des base orthonormées partant de n'importe quel produit scalaire et de n'importe quelle base. L'intérêt de telles bases multiple : calcul de distances, d'angles, de projections et de symétries...

Définition II.4 (Rappel : base orthonormée)**.**

Une famille de vecteurs $(e_1, \cdots, e_n)$ forme une base orthonormée si et seulement si $n = \dim(E)$ et, pour tout $i \neq j$, $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ et $\|e_i\| = 1$.

Propriété II.5.

Dans une base orthonormée, les coordonnées coincident avec le produit scalaire sur la base : si $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base orthonormée et $x \in E$, alors

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i.$$

Preuve : Soit $x \in E$ et soient x_i les coordonnées de x dans la base $(e_1, \cdots, e_n)$, de telle sorte que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Soit $i \in \{1; n\}$. Alors :

$$\langle x, e_i \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} x_j e_j, e_i \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \langle e_j, e_i \rangle .$$

Or $\langle e_j, e_i \rangle = 1$ si $j = i$, et 0 sinon. Donc $\langle x, e_i \rangle = x_i$, ce qu'il fallait démontrer. □

II.2 Changements de base et matrices congruentes

Question II.6.

Pour un produit scalaire donné, quelle est la famille de matrices associée obtenue en faisant varier les bases de E ? Quel est la "meilleure" matrice possible ? La "meilleure" base associée ?

Définition II.7.

Soient A, B deux matrices de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. On dit qu'elles sont **congruentes** *si elles peuvent être associées au même produit scalaire, mais dans des bases différentes.*

Cette définition peut se traduire algébriquement, et définit une nouvelle classe d'équivalence sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

Propriété II.8.

Soient A, $B \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. La matrice B est congruente à A si et seulement s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $B = (P^T)AP$.

Cette relation définit une relation d'équivalence sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

Preuve : Supposons les matrices A et B congruentes. Il existe un espace vectoriel E, un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sur E et deux bases $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ telles que A soit la matrice de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ dans $\mathscr{B}$ et B celle de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ dans $\mathscr{B}'$. Soit P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$. Pour $x \in E$, on note X ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ et X' ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}'$, de telle sorte que $X = PX'$.

Remarquons que $\langle x, y\rangle = X^TAY = (X')^TBY'$ pour tous x, $y \in E$. Mais :

$$X^TAY = (PX')^TA(PY') = (X')^TP^TAPY'.$$

Or B est l'unique matrice M telle que $\langle x, y\rangle = (X')^TMY'$ pour tous x, $y \in E$. Donc $B = P^TAP$.

Réciproquement, supposons que $B = P^TAP$. Posons $E = \mathbb{R}^n$, $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire de matrice A dans la base canonique, $\mathscr{B}'$ la base de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice de passage dans la base $\mathscr{B}$ est P. Alors, pour tous x, $y \in E$,

$$\langle x, y\rangle = X^TAY = (PX')^TA(PY') = (X')^T(P^TAP)Y' = (X')^TBY'.$$

Donc B représente le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ dans la base $\mathscr{B}'$, et est donc congruente à A.

Finalement, il faut démontrer la réflexivité, la symétrie et la transitivité de cette relation. Notons $A \sim_c B$ si B est congruente à A.

1. Réflexivité : soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Choisissons $P = I_n$. On obtient $A \sim_c A$.
2. Symétrie : soient A, $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A \sim_c B$. Soit $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $B = P^TAP$. Alors $A = (P^T)^{-1}BP^{-1} = (P^{-1})^TBP^{-1}$, où $P^{-1} \in GL_n(\mathbb{R})$. Donc $B \sim_c A$.
3. Transitivité : soient A, B, $C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A \sim_c B$ et $B \sim_c C$. Soient P, $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ telles que $B = P^TAP$ et $C = Q^TBQ$. Alors $C = Q^TP^TAPQ = (PQ)^TA(PQ)$, et $PQ \in GL_n(\mathbb{R})$. Donc $A \sim C$.

□

Dans ce cadre, l'étude des classes d'équivalence est assez simple. En effet, l'existence d'une base orthonormée permet de d'obtenir le résultat suivant, qui donne une décomposition de toutes les matrices associées à un produit scalaire :

Théorème 1.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n. L'ensemble de toutes les matrices associées à un produit scalaire est indépendant de ce produit scalaire et égal à la classe de congruence de la matrice identité :

$$\{(P^T)P;\ P \in GL_n(\mathbb{R})\}.$$

Plus précisément, toute matrice A de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ associée à un produit scalaire peut s'écrire sous la forme

$$A = (K^T)K \text{ où } K \text{ est une matrice triangulaire supérieure inversible.}$$

Cette écriture s'appelle **décomposition de Cholevski** *de A.*

Preuve : Il s'agit d'une conséquence de l'algorithme d'orthogonalisation de Gram-Schmidt, que nous allons rappeler. Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire et $\mathscr{B}$ une base de E tels que A soit la matrice associée à $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dans la base $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_n)$. Nous allons utiliser ce procédé pour obtenir une nouvelle base $\mathscr{B}'$ orthonormée pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Commençons par poser

$$f_1 := \frac{e_1}{\sqrt{\langle e_1, e_1 \rangle}},$$

de telle sorte que $\langle f_1, f_1 \rangle = 1$.

Ensuite, nous procédons par récurrence. Supposons que l'on a obtenu $(f_1, \cdots, f_k)$ orthonormés et tels que $\mathrm{Vect}(f_1, \cdots, f_k) = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_k)$. Prenons le vecteur e_{k+1}, et :

- ▷ Projetons-le orthogonalement à $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_k)$. Cela revient à retrancher son projeté orthogonal sur $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_k)$. Notons f'_{k+1} le vecteur obtenu.
- ▷ Multiplions f'_{k+1} par un scalaire bien choisi. Nous obtenons alors un vecteur f_{k+1} tel que $\langle f_{k+1}, f_{k+1} \rangle = 1$.

Pour la première étape, le vecteur suivant convient :

$$f'_{k+1} := e_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle f_{k+1}, f_i \rangle f_i.$$

Par construction, pour tout $j \in \{1; k\}$,

$$\begin{aligned}
\langle f'_{k+1}, f_i \rangle &= \left\langle e_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle f_{k+1}, f_i \rangle f_i, f_j \right\rangle \\
&= \langle e_{k+1}, f_j \rangle - \sum_{i=1}^{k} \langle f_{k+1}, f_i \rangle \langle f_i, f_j \rangle \\
&= \langle e_{k+1}, f_j \rangle - \langle f_{k+1}, f_j \rangle \\
&= 0,
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que $\langle f_i, f_j \rangle = 1$ si $i = j$, et 0 sinon. De plus, $\mathrm{Vect}(f_1, \cdots, f_k, f'_{k+1}) = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_{k+1})$.

Pour la seconde étape, posons

$$f_{k+1} := \frac{f'_{k+1}}{\sqrt{\langle f'_{k+1}, f'_{k+1}\rangle}}.$$

Alors $\mathrm{Vect}(f_1, \cdots, f_{k+1}) = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_{k+1})$, et la famille $(f_1, \cdots, f_{k+1})$ est bien orthonormée.

Par récurrence, on obtient une base orthonormée $(f_1, \cdots, f_n)$ de E telle que $\mathrm{Vect}(f_1, \cdots, f_k) = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_k)$ pour tout $k \in \{1; n\}$. Posons $\mathscr{B}' := (f_1, \cdots, f_n)$. Soit K la matrice de passage de $\mathscr{B}'$ à $\mathscr{B}$.

La matrice représentant $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dans la base $\mathscr{B}'$ est $B = (K^{-1})^T A K^{-1}$. Mais, la base $\mathscr{B}'$ étant orthonormée, B est la matrice identité, donc $I_n = (K^{-1})^T A K^{-1}$, ou encore $A = K^T K$. De plus, comme $\mathrm{Vect}(f_1, \cdots, f_k) = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_k)$ pour tout k, le vecteur e_k est combinaison linéaire de $f_1, \cdots, f_k$ pour tout k, et donc la matrice K est triangulaire supérieure. □

Exercice 4. La décomposition de Cholevski est-elle unique ?

Conséquence II.9.

Toute matrice représentant un produit scalaire est congruente à la matrice identité. En particulier, il n'y a qu'une seule classe de congruence de matrices symétriques à valeurs propres strictement positives.

II.3 Formes linéaires, hyperplans et vecteur normaux

Le but est ce paragraphe est d'identifier les formes linéaires à l'aide du produit scalaire, puis d'en déduire des méthodes pratiques permettant de déterminer l'équation cartésienne d'un hyperplan.

Remarque II.10.

Pour tout $u \in E$, l'application ℓ_u définie pour tout $x \in E$ par $\ell_u(x) = \langle u, x\rangle$ est une forme linéaire sur E.

En fait, on peut dire plus : si $u \neq 0$, alors ℓ_u est non nulle (en effet, $\ell_u(u) = \langle u, u\rangle > 0$), et donc $\mathrm{Ker}(\ell_u)$ est un hyperplan. En manipulant la définition d'un hyperplan, il vient :

$$\mathrm{Ker}(\ell_u) = \{x \in E, \langle u, x\rangle = 0\} = \{u\}^{\perp}.$$

On peut alors faire le lien entre forme linéaire et produit scalaire, en passant par la caractérisation d'un hyperplan :

Propriété II.11.

Un sous-espace vectoriel H de E est un hyperplan si et seulement s'il existe $w \neq 0$ tel que $H = \{w\}^{\perp}$.

Un tel vecteur w est appelé **vecteur normal** *à H. Il est unique à un facteur multiplicatif près et définit une base de $H^{\perp}$.*

Preuve : Comme H est de dimension $n-1$, son orthogonal $H^{\perp}$ est une droite vectorielle. Soit w un vecteur engendrant $H^{\perp}$. Alors

$$H = (H^{\perp})^{\perp} = \mathrm{Vect}(w)^{\perp}.$$

De plus, si $x \in \mathrm{Vect}(w)^\perp$, alors $\langle x, w\rangle = 0$, donc $x \in \{w\}^\perp$. Réciproquement, si $x \in \{w\}^\perp$, étant donné $y = \lambda w \in \mathrm{Vect}(w)$, on a $\langle x, y\rangle = \lambda \langle x, w\rangle = 0$, donc $x \in \mathrm{Vect}(w)^\perp$. Par conséquent, $\mathrm{Vect}(w)^\perp = \{w\}^\perp$. □

On obtient donc deux caractérisations d'un hyperplan :

Propriété II.12.

Soit H un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Soit $\langle \cdot, \cdot\rangle$ un produit scalaire sur E. Alors H est un hyperplan si et seulement si l'une des propriétés suivantes est satisfaite :

- ▹ *il existe $w \neq 0$ tel que $H = \{w\}^\perp$;*
- ▹ *il existe $\ell \in E^* \setminus \{0\}$ tel que $H = \mathrm{Ker}(\ell)$.*

Exercice 5. Montrer que deux formes linéaires qui ont le même noyau sont proportionnelles.

On déduit de ce qui précède une version très simplifiée d'un théorème qui prendra une forme très générale en analyse : le théorème de représentation de Riesz.

Conséquence II.13 (Théorème de Riesz en dimension finie)**.**

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension finie. Toute forme linéaire de E dérive du produit scalaire. Autrement dit, pour toute forme linéaire $\ell \in E^*$, il existe un unique vecteur $u \in E$ tel que, pour tout $x \in E$,

$$\ell(x) = \langle u, x\rangle .$$

Attention : Le vecteur u représentant une forme linéaire donnée dépend du produit scalaire choisi. De même, dans la propriété précédente, étant donné un hyperplan H, le choix de vecteurs w tel que $H = \{w\}^\perp$ dépend du produit scalaire choisi.

Preuve : Étant donné $w \in E$, on dispose d'une forme linéaire $x \mapsto \langle w, x\rangle$. L'application

$$\Theta : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E^* \\ w & \mapsto & (x \mapsto \langle w, x\rangle) \end{array} \right. .$$

est linéaire. On cherche à montrer que Θ est un isomorphisme. Les espaces E et E^* étant de même dimension, il suffit de montrer que $\mathrm{Ker}(\Theta) = \{0\}$.

Soit $w \in \mathrm{Ker}(\Theta)$. Alors, pour tout $x \in E$, on a $\langle w, x\rangle = 0$. En particulier, $\langle w, w\rangle = 0$, et donc $w = 0$. □

Exercice 6. Trouver une autre démonstration du théorème de Riesz, en s'appuyant sur le lien entre produit scalaire et hyperplans et l'exercice précédent.

Exemple II.14.

Supposons E muni d'une base orthonormée. Pour $x \in E$, notons X son vecteur coordonnées dans cette base. Soit ℓ une forme linéaire. Elle peut être représentée dans cette base par un vecteur ligne L.

Alors $\ell(x) = LX = (L^T)^T X$. Le vecteur $y \in E$ représentant la forme linéaire ℓ est donc le vecteur de coordonnées L^T (on a bien alors $\langle y, x\rangle = Y^T X = \ell(x)$ pour tout x). Dans une base orthonormée, prendre le représentant, c'est transposer le vecteur de coordonnées.

Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa base et de son produit scalaire canoniques, la forme linéaire $\ell(x) = 2x_1 + x_2$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$, et est représentée par le vecteur $y = (2, 1)$ qui a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 7. Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire $\langle x, y \rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$ sur $\mathbb{R}^2$. Quel vecteur représente la forme linéaire $\ell(x) = 2x_1 - x_2$?

II.4 Méthodes de détermination des équations cartésiennes d'un hyperplan

Nous allons montrer sur un exemples différentes façons de calculer une équation cartésienne d'un hyperplan : à l'aide du déterminant, à l'aide d'un produit scalaire, et à l'aide de formes linéaires.

Données : dans $\mathbb{R}^4$, on donne un hyperplan H engendré par une famille libre (u_1, u_2, u_3). Pour les applications numériques : $u_1 = (1, 2, 3, 4)$; $u_2 = (1, 2, 1, 2)$; $u_3 = (-1, -2, 1, 2)$.

L'objectif est de déterminer une équation cartésienne de H.

À l'aide du déterminant

1. On a l'équivalence : $u \in H \iff \det(u_1, u_2, u_3, u) = 0$. Cette propriété se démontre en remarquant que $\det(u_1, u_2, u_3, u) = 0$ si et seulement si la famille (u_1, u_2, u_3, u) est liée, puis que la famille est liée si et seulement si $u \in \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)$.
2. L'expression de ce déterminant est en fait l'expression d'une forme linéaire

$$\ell(u) := \det(u_1, u_2, u_3, u),$$

   et $H = \mathrm{Ker}(\ell)$. En posant $u = (x, y, z, t)$, on développe le déterminant par rapport à la colonne correspondant à u, on obtient une équation explicite de H de la forme $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \ \ell(x, y, z, t) = 0\}$, ce qui est bien une équation cartésienne de H.

Exemple II.15.
Dans l'application donnée : soit (x, y, z, t) un vecteur. Alors

$$\begin{aligned} (x,y,z,t) \in H &\iff \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & x \\ 2 & 2 & -2 & y \\ 3 & 1 & 1 & z \\ 4 & 2 & 2 & t \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff 8x - 4y = 0. \end{aligned}$$

En simplifiant le résultat, on voit que l'hyperplan H est d'équation $2x - y = 0$.

Cette méthode permet de calculer des équations d'hyperplan. Elle peut être assez calculatoire quand la dimension augmente, sauf à trigonaliser la matrice associée, ce qui revient à d'autres méthodes. Elle a cependant des conséquences importantes, que nous aborderons bientôt dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

À l'aide du produit scalaire

1. On utilise la propriété du vecteur normal : $H = \{w\}^\perp$. On cherche à déterminer un tel vecteur w.
2. Pour cela, on peut écrire que w est orthogonal à (u_1, u_2, u_3) : on obient donc dans ce cas un système de 3 équations à 4 inconnues qu'il faut résoudre. N'importe quelle solution non nulle convient.

3. Une méthode alternative pour trouver w consiste à appliquer le procédé d'orthogonalisation de Gramm-Schmidt à la famille (u_1, u_2, u_3) qu'on complète pour avoir une base de $\mathbb{R}^4$. On obtient une base orthonormée $(f_1, f_2, f_3 f_4)$ de $\mathbb{R}^4$ telle que $H = \{e_4\}^\perp$, et $w = f_4$ convient.
4. dans tous les cas, $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \langle w, (x, y, z, t)\rangle = 0\}$, ce qui est bien une équation cartésienne de H.

Exemple II.16. $u_1 = (1, 2, 3, 4)$ *;* $u_2 = (1, 2, 1, 2)$ *;* $u_3 = (-1, -2, 1, 2)$*. Dans l'application donnée : Posons* $u_4 := (1, 0, 0, 0)$*. Alors* (u_1, u_2, u_3, u_4) *est une base*[2] *de* $\mathbb{R}^4$*. On utilise l'algorithme d'orthogonalisation de Gram-Schmidt pour obtenir une base orthonormée* (v_1, v_2, v_3, v_4) *de* $\mathbb{R}^4$ *:*

$$\begin{aligned}
v_1 &= \frac{1}{\sqrt{30}}(1, 2, 3, 4)\\
v_2 &= \frac{1}{\sqrt{330}}(7, 14, -9, -2)\\
v_3 &= \frac{1}{\sqrt{55}}(-1, -2, -5, 5)\\
v_4 &= \frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1, 0, 0)
\end{aligned}$$

Or $H = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3) = \{v_4\}^\perp = \{(x, y, z, t) : \langle\langle x, y, z, t\rangle, v_4) = 0\}$*. L'hyperplan* H *est donc d'équation* $2x - y = 0$*.*

Cette méthode se généralise aisément en dimension supérieure. Soit $(v_1, \cdots, v_k)$ une famille libre de $\mathbb{R}^n$. On la complète en une base $(v_1, \cdots, v_n)$, et on utilise ll'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt pour obtenir une base orthonormée $(w_1, \cdots, w_n)$. Alors $V := \mathrm{Vect}(v_1, \cdots, v_k) = \mathrm{Vect}(w_1, \cdots, w_k) = \{w_{k+1}, \cdots, w_n\}^\perp$ est défini par les $n - k$ équations cartésiennes $\langle u, w_i\rangle = 0$ pour $k + 1 \leq i \leq n$. Cette méthode reste cependant assez gourmande en calculs.

On peut remarquer que le calcul du déterminant permet de trouver les coordonnées d'un vecteur normal : c'est une conséquence de l'unicité des formes linéaires dont le noyau est égal à H (à un facteur près). En particulier si on définit w tel que pour tout $u \in E$, $\det(u, u_1, \cdots, u_n) = \langle u, w\rangle$, alors w est un vecteur normal à H.

Dans $\mathbb{R}^2$, on retrouve une construction connue. Munissons $\mathbb{R}^2$ de sa base et de son produit scalaire canoniques. Soit x un vecteur non nul. Alors, pour tout $u \in \mathbb{R}^2$,

$$\det(x, u) = x_1 u_2 - x_2 u_1 = (-x_2)u_1 + x_1 u_2 = \langle w, u\rangle,$$

où $w = (-x_2, u_1)$. Ainsi, échanger les coordonnées d'un vecteur et prendre l'opposé de la première coordonnée permet de trouver un vecteur orthogonal.

Dans $\mathbb{R}^3$, on retrouve aussi une construction connue. Munissons $\mathbb{R}^3$ de sa base et de son produit scalaire canoniques. Soient x, $y \in \mathbb{R}^3$ non colinéaires. Alors, pour tout $u \in \mathbb{R}^3$,

$$\det(x, y, u) = (x_2 y_3 - x_3 y_2)u_1 + (x_3 y_1 - x_1 y_3)u_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)u_3 = \langle w, u\rangle,$$

où $w = (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1)$. On reconnaît ici le produit vectoriel $w = x \times y$ de x et de y. Le produit vectoriel de deux vecteurs x, y est donc bien un vecteur orthogonal au plan engendré par x et y.

2. Attention à bien choisir le vecteur par lequel compléter (u_1, u_2, u_3) en une base. Ici, les vecteurs $(0, 0, 1, 0)$ et $(0, 0, 0, 1)$ ne conviennent pas !

À l'aide de formes linéaires

1. Trouver une équation cartésienne de H, c'est trouver une forme linéaire non nulle ℓ qui s'annule sur H, c'est-à-dire telle que $\ell(u_1) = \ell(u_2) = \ell(u_3) = 0$.
2. Les coordonnées de ℓ dans la base canonique sont un vecteur ligne $\begin{bmatrix} a & b & c & d \end{bmatrix}$; autrement dit, $\ell(x, y, z, t) = ax + by + cz + dt$. La condition $\ell(u_1) = \ell(u_2) = \ell(u_3) = 0$ donne trois équations linéaires satisfaites par a, b, c, d. On résoud le système correspondant ; cela revient à trouver le noyau d'une matrice de $\mathscr{M}_{3,4}(\mathbb{R})$.
3. Rappelons que les manipulations sur les lignes d'une matrice ne modifient pas son noyau, ce qui permet de simplifier le système d'équations.

Exemple II.17.

Dans l'exemple donné, la condition $\ell(u_1) = \ell(u_2) = \ell(u_3) = 0$ *se lit* $a + 2b + 3c + 4d = a + 2b + c + 2d = -a - 2b + c + 2d = 0$. *On cherche le noyau de la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Or les manipulations sur les lignes ne modifiant pas le noyau d'une matrice,

$$\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \{(a, b, c, d) : \ a + 2b = c = d = 0\}.$$

Le noyau est donc engendré par $(2, -1, 0, 0)$. *La forme linéaire* $\ell(x, y, z, t) = 2x - y$ *est donc solution du problème posé, et fournit donc une équation de* H.

Cette méthode se généralise en dimension supérieure. Soit $(v_1, \cdots, v_k)$ une famille libre de $\mathbb{R}^n$. Chercher des équations cartésiennes de $V = \mathrm{Vect}(v_1, \cdots, v_k)$, c'est chercher des formes linéaires ℓ telles que $\ell(v_1) = \cdots = \ell(v_k) = 0$. En posant $\ell = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$, on se retrouve à résoudre un système de k équations linéaire des n variables a_1, ..., a_n. Une base de ces solutions (donc une base du noyau de la matrice associée) fournit $n - k$ équations cartésiennes définissant V.

III Isométries et matrices orthogonales : décomposition en produit de réflexions

III.1 Isométries et matrices orthogonales

Définition III.1.

Soit E *un espace vectoriel euclidien. Une isométrie de* E *est un endomorphisme* $f \in L(E)$ *tel que* $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ *pour tous* x, $y \in E$.

On dit alors que f *préserve le produit scalaire.*

La propriété suivante est un peu plus facile à vérifier en pratique (elle n'implique qu'un seul vecteur).

Propriété III.2.

Soit $f \in L(E)$. Alors f est une isométrie si et seulement si f préserve la norme euclidienne : $\|f(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in E$.

Preuve : Si f est une isométrie, alors $\langle f(x), f(x)\rangle = \langle x, x\rangle$ pour tout $x \in E$, et donc, en prenant la récine carrée, $\|f(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in E$.

Réciproquement, supposons que f préserve la norme euclidienne. le produit scalaire est caractérisé par sa norme associée grâce à l'identité de polarisation :

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x+y\| - \|x\| - \|y\|\right).$$

Or $\|x+y\| - \|x\| - \|y\| = \|f(x)+f(y)\| - \|f(x)\| - \|f(y)\|$, donc f préserve le produit scalaire. □

Propriété III.3.

L'ensemble des isométries de E forme un groupe pour la composition, appelé **groupe d'isométries de** E *et noté $\mathcal{O}(E)$.*

Preuve : Montrons tout d'abord que toute isométrie est inversible. Soit $f \in L(E)$ une isométrie. Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$. Alors $0 = \|f(x)\| = \|x\|$, donc $x = 0$. Donc $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$, et f est inversible.

Il s'agit maintenant de montrer que $\mathcal{O}(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$.

- ▷ Pour tous $x \in E$, on a $\|x\| = \|x\|$, donc l'identité appartient à $\mathcal{O}(E)$.
- ▷ Soient f, $g \in \mathcal{O}(E)$. Soit $x \in E$. Alors $\|(g \circ f(x)\| = \|f(x)\| = \|x\|$, donc $g \circ f \in \mathcal{O}(E)$.
- ▷ Soit $f \in \mathcal{O}(E)$. Soit $x \in E$. Alors $\|f^{-1}(x)\| = \|f(f^{-1}(x))\| = \|x\|$, donc $f^{-1} \in \mathcal{O}(E)$.

□

Définition III.4.

Soit $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que P est une **matrice orthogonale** *si $(P^T)P = I_n$*

Propriété III.5.

L'ensemble des matrices orthogonales est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ appelé **groupe orthogonal** *et noté $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.*

Preuve : Les démonstrations sont vues en L2 et à connaître. □

Propriété III.6.

Si $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors $|\det(P)| = 1$. L'ensemble des matrices orthogonales de déterminant 1 est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ appelé **groupe spécial orthogonal** *et noté $SO_n(\mathbb{R})$.*

Exercice 8. Soit $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et λ une valeur propre complexe de P. Montrez que $|\lambda| = 1$.

Les matrices orthogonales sont en pratique les matrices qui représentent les isométries dans une base orthonormée. Elles correspondent aux matrices de passages entre bases orthonormées. Les matrices spéciales orthogonales préservent de plus l'orientation de ces bases. Les groupes $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{R})$ sont des objets algébriques importants.

Pour reconnaitre une isométrie, on peut utiliser les caractérisations suivantes :

Propriété III.7.

Soit $f \in L(E)$ et $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E. Alors f est une isométrie si et seulement si l'une des propriétés suivantes est réalisée :

1. *l'image d'une base orthonormée par f est une base orthonormée ;*
2. *la matrice associée à f dans une base orthonormée est une matrice orthogonale.*

PREUVE : Les démonstrations sont vues en L2 et à connaître. □

On peut alors définir une isométrie *directe* comme une isométrie de déterminant [3] 1. En particulier, la matrice d'une isométrie directe dans une base orthonormée est une matrice spéciale orthogonale. On note $SO(E)$ le groupe des isométries directes.

III.2 Projections et symétries orthogonales

Définition III.8.

Soit F un sous-espace vectoriel de E. On appelle projection orthogonale sur F la projection sur F parallèlement à $F^{\perp}$.

Exercice 9. Montrer que l'on peut trouver une base orthonormée de E dont les $\dim(F)$ premiers vecteurs forment une base de F et les vecteurs restants une base de $F^{\perp}$. Quelle est la matrice de la projection orthogonale sur F dans cette base ?

Définition III.9.

Soit F un sous-espace vectoriel de E. On appelle symétrie orthogonale par rapport à F la symétrie d'axe F parallèlement $F^{\perp}$.

Propriété III.10.

Une symétrie est une isométrie si et seulement si c'est une symétrie orthogonale.

PREUVE : Soit F et G deux espaces supplémentaires. Soit s la symétrie d'axe F parallèlement à G. Pour $x \in E$, notons $x = x_F + x_G$, où $x_F \in F$ et $x_G \in G$. Alors, pour tous x, $y \in E$:

$$\begin{aligned} \|s(x)\|^2 &= \langle s(x), s(x) \rangle \\ &= \langle x_F - x_G, x_F - x_G \rangle \\ &= \langle x_F, x_F \rangle + \langle x_G, x_G \rangle - 2\langle x_F, x_G \rangle \\ &= \|x\|^2 - 4\langle x_F, x_G \rangle . \end{aligned}$$

Par conséquent, s est une isométrie si et seulement si $\langle x_F, x_G \rangle = 0$ pour tous $x_F \in F$ et $x_G \in G$, c'est-à-dire si et seulement si F et G sont orthogonaux. □

Définition III.11.

On appelle **réflexion** *une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.*

Exercice 10. Quelles symétries orthogonales de $\mathbb{R}^n$ appartiennent à $SO_n(\mathbb{R})$? Les matrices de réflexion apprtiennent-elles à $SO_n(\mathbb{R})$?

Exercice 11. Démontrer que la matrice d'une symétrie orthogonale dans une base orthonormée est une matrice symétrique et orthogonale.

3. Rappelons que le déterminant est un invariant de similitude, et donc ne dépend pas de la base choisie pour représenter l'endomorphisme.

III.3 Décomposition des isométries

Les réflexions engendrent le groupe des isométries.

Théorème 2 (Théorème de Cartan-Dieudonné).
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ muni d'un produit scalaire, et $f \in \mathcal{O}(E)$. Alors f est la composée d'au plus n réflexions.

Remarque III.12.
Pour $n = 2$, ce théorème découle d'une classification des isométries de $\mathbb{R}^2$.

- ▷ *Si f est une isométrie indirecte, alors le poynôme caractéristique de f est de la forme $\chi_f(\lambda) = \lambda^2 - Tr(f)X + \det(f)$. En particulier, $\chi_f(0) = \det(f) < 0$, donc f a deux valeurs propres réelles distinctes, et est donc diagonalisable dans $\mathbb{R}$. De plus, si λ est une valeur propre de f et x un vecteur propre associé, alors $|\lambda|\|x\| = \|f(x)\| = \|x\|$, donc $|\lambda| = 1$. La seule possibilité est alors que f ait une valeur propre égale à 1 et l'autre égale à -1. Mais alors f est la symétrie d'axe $\operatorname{Ker}(f - id)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(f + id)$, et comme f est une isométrie, $\operatorname{Ker}(f + id) = \operatorname{Ker}(f - id)^\perp$. Donc f est la réflexion d'axe $\operatorname{Ker}(f - id)$.*
- ▷ *Si f est une isométrie directe, alors f est une rotation d'angle $\theta \in \mathbb{R}$. Soit Δ_1, Δ_2 deux droites formant un angle de $\theta/2$. On vérifie que $f = s_2 \circ s_1$, où s_1 (respectivement s_2) est la réflexion d'axe Δ_1 (respectivement Δ_2).*

Preuve : On procède par récurrence sur la dimension.

Initialisation : pour $n = 0$, la seule isométrie est l'identité, qui est le produit de 0 réflexions [4].

Hérédité : Soit $n \geq 3$. Supposons la propriété souhaitée valable jusqu'au rang $n - 1$.

- ▷ Si $\operatorname{Ker}(f - id) \neq \{0\}$: choisissons $w \in \operatorname{Ker}(f - id) \setminus \{0\}$, et posons $H = \{w\}^\perp$. Alors $f(w) = w$ donc $H = \{w\}^\perp = \{f(w)\}^\perp = f(\{w\}^\perp) = f(H)$. Par l'hypothèse de récurrence, il existe $k \geq n - 1$ et $s_1, \cdots, s_k$ des réflexions de H telles que $f^H_{|H} = s_k \circ \cdots \circ s_1$. Étendons ces réflexions en des réflexions de $\mathbb{R}^n$ en posant $\tilde{s}_i(x_H + tw) = s_i(x_H) + tw$ pour tous $x_H \in H$ et $t \in \mathbb{R}$. Alors $f = \tilde{s}_k \circ \cdots \circ \tilde{s}_1$ est la composée d'au plus $n - 1$ réflexions.
- ▷ Sinon : soit $w \neq 0$. Alors $f(w) \neq w$. Posons $H := \{f(w) - w\}^\perp$, et soit s la réflexion d'axe H. Remarquons que $\langle f(w) - w, f(w\rangle + w) = \langle f(w), f(w)\rangle - \langle w, w\rangle = 0$, donc $f(w) + w \in H$. Par conséquent,
$$f(w) = \frac{f(w) - w}{2} + \frac{f(w) + w}{2}$$
est une décomposition de f dans les espaces supplémentaires $\operatorname{Vect}(f(w) - w) \oplus H$. Par conséquent,
$$s(f(w)) = -\frac{f(w) - w}{2} + \frac{f(w) + w}{2} = w.$$
Mais alors $\operatorname{Ker}(s \circ f - id) \neq \{0\}$. Comme dans le cas précédent, on peut montrer que $s \circ f$ est la composée de $k \leq n - 1$ réflexions $s_1, \cdots, s_k$. Par conséquent, $f = s \circ s_1 \circ \cdots \circ s_k$ est la composée d'au plus n réflexions.

□

4. Si vous n'êtes pas à l'aise avec cette initialisation, démontrez le résultat voulu pour $n = 1$.

Conséquence III.13.

Soit $f \in SO_3(\mathbb{R})$ une rotation directe de l'espace. Alors f fixe une droite vectorielle.

Preuve : Écrivons f comme un produit de $k \leq 3$ réflexions : $f = s_1 \circ \cdots \circ s_3$. Alors $\det(f) = \det(s_1) \cdots \det(s_k) = (-1)^k$. Comme f est une isométrie directe, $\det(f) = 1$ donc k est pair.

Si $k = 0$, alors f est l'identité, qui fixe bien n'importe quelle droite vectorielle.

Si $k = 2$, soient H_1 et H_2 des plans tels que s_1 soit la réflexion d'axe H_1, et s_2 la réflexion d'axe H_2. Alors f fixe $H_1 \cap H_2$, qui est de dimension au moins 1, donc f fixe une droite vectorielle. $\square$

Exercice 12. Montrez que, si n est impair, alors toute isométrie directe de $\mathbb{R}^n$ fixe une droite vectorielle. Que se passe-t-il si n est pair ?