Feuille d'exercices 4 : Formes quadratiques et matrices symétriques

1. Formes bilinéaires-matrices symétriques

Exercice 1. Parmi les applications $\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définies pour (x_1, x_2) et (y_1, y_2) deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ par les formules suivantes

1. $\phi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_2 + x_2y_1$;
2. $\phi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_2 - x_2y_1$;
3. $\phi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1x_2 + x_1y_2$;
4. $\phi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1$;
5. $\phi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_2$;

lesquelles définissent une forme bilinéaire ? symétrique ? antisymétrique ? Dans chaque cas où ϕ est une forme bilinéaire, écrire la matrice associée dans la base canonique ainsi que la forme quadratique qui lui est associée.

Exercice 2. Parmi les applications suivantes, lesquelles définissent des formes bilinéaires ? Sont-elles symétriques ? Lorsque la forme est bilinéaire, écrire la forme quadratique associée.

1. $\phi : M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, (A, B) \longmapsto \mathrm{Tr}(AB)$; $(*)$Si oui, écrire la matrice associée dans la base canonique pour n=2 ;
2. $\phi : M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, (A, B) \longmapsto \mathrm{Tr}({}^tAB)$; $(*)$Si oui, écrire la matrice associée dans la base canonique pour n=2 ;
3. $\phi : C^0(\mathbb{R}) \times C^0(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, (f, g) \longmapsto \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$, où $C^0(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$;
4. $\phi : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}, (f, g) \longmapsto f(0)g(0) + f'(0)g'(0) + f''(0)g''(0)$; $(*)$Si oui, écrire la matrice associée dans la base canonique

Exercice 3. Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la forme bilinéaire définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, par

$$\phi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 - \frac{1}{2}x_2y_1 + \frac{3}{2}x_1y_2 - x_2y_2.$$

Est-ce une forme bilinéaire symétrique ? Si ce n'est pas le cas, décomposer ϕ en la somme d'une forme bilinéaire symétrique et d'une forme bilinéaire anti-symétrique. Écrire les matrices associées à chaque forme dans la base canonique.

Exercice 4. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et ϕ la forme bilinéaire associée à A dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$.

1. Donner l'expression en coordonnées de ϕ dans $\mathcal{B}$.
2. Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$ la base de $\mathbb{R}^2$ telle que $e'_1 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2)$ et $e'_2 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2)$. Donner l'expression en coordonnées de ϕ dans $\mathcal{B}'$ ainsi que la matrice associée dans la base $\mathcal{B}'$.

2. Sur les adjoints

Exercice 5. (Cours) Montrer les propriétés suivantes

1. Pour tout A de $M_n(\mathbb{R})$, on a ${}^t({}^tA) = A$
2. Pour tout A de $M_{p,n}(\mathbb{R})$, on a ${}^tAA \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
3. L'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$.

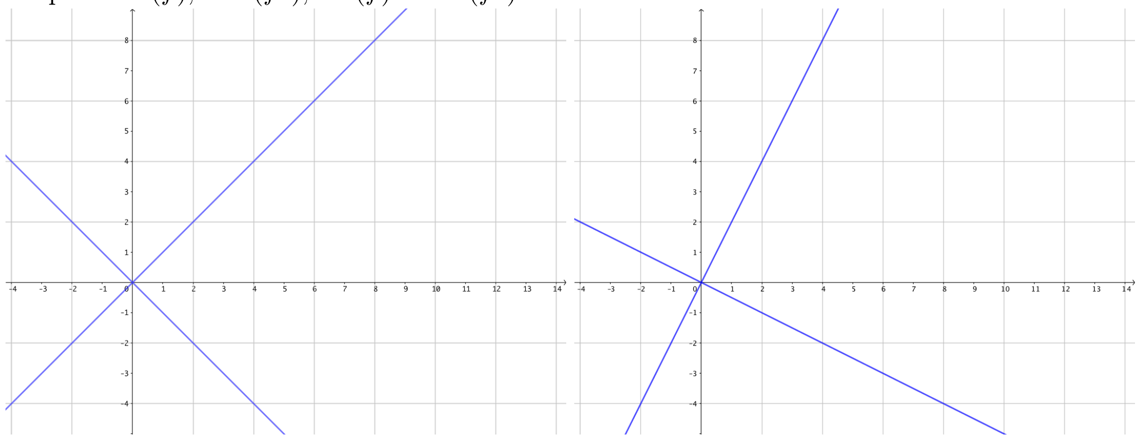
Exercice 6. (Voir cours) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme associé de $E = \mathbb{R}^n$ dans une base $\mathcal{B}$.

1. (a) Montrer que l'on a $(Im(f^*))^\perp = Ker(f)$.
   (b) En déduire les égalités $(Ker(f))^\perp = Im(f^*)$ et $(Im(f))^\perp = Ker(f^*)$

(c) Montrer que f et f^* ont même rang

2. $(*)$ Soient $f \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ une application linéaire et A sa matrice associée dans la base canonique. Soit f^* la matrice associée dans les bases canoniques à ${}^tA$.
   (a) Quels sont les ensembles de départ et d'arrivée de f^* ?
   (b) Quelle(s) propriété(s) de la question précédente est/sont encore vraie(s) ?

Exercice 7. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Décrire l'endomorphisme f qui lui est associé dans la base canonique et indiquer $Ker(f)$, $Ker(f^*)$, $Im(f)$ et $Im(f^*)$ sur les schémas suivants :



3. Formes quadratiques

Exercice 8. Parmis les formes $q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $n = 2$ ou 3, suivantes, lesquelles sont des formes quadratiques ? Lorsque cela est le cas, identifier alors la forme bilinéaire et la matrice symétrique associée.

1. $q(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 3x_1x_2 + 6x_2^2$;
2. $q(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_1 + 3x_2 + 6x_2^2$;
3. $q(x_1, x_2, x_3) = 8x_1x_2 + 4x_2^2$;
4. $q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3$;
5. $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 + x_2x_3 + 7x_3^2$;
6. $q(x_1, x_2, x_3) = 4x_1x_2$;
7. $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 + 2x_1x_3 + x_3^2 + 2x_2x_3$.

Exercice 9.

1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien et q une forme quadratique sur E. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E$, $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$.
2. On suppose que $E = \mathbb{R}^2$ et on définit $q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ par $q(x_1, x_2) = (|x_1| + |x_2|)^2$. Vérifiez que si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x_1, x_2) \in E$, $q(\lambda(x_1, x_2)) = \lambda^2 q(x_1, x_2)$ mais que q n'est pas une forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 10. (Cours)
Soit $q : E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien E et ϕ sa forme bilinéaire associée. Montrer que

1. pour tout $(x, y) \in E$, $q(x + y) = q(x) + 2\phi(x, y) + q(y)$;
2. pour tout $(x, y) \in E$, $\phi(x, y) = \frac{1}{4}\left(q(x + y) - q(x - y)\right)$;
3. pour tout $(x, y) \in E$, $q(x + y) + q(x - y) = 2\left(q(x) + q(y)\right)$.

4. Changement de base et réduction des formes quadratiques

Exercice 11. Compléter les coefficients manquants de la matrice suivante pour en faire une matrice orthogonale :

$$\begin{pmatrix} * & 0 & * \\ * & * & * \\ * & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Exercice 12. Soit q la forme quadratique définie dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ pour tout $u = (x, y)$ par $q(u) = x^2 - y^2$. Peut-on trouver une base dans laquelle q peut s'écrire sous la forme ci-dessous ? Lorsque c'est possible, préciser la nouvelle base choisie.

1. $q(u) = 2x'^2 + \frac{1}{4}y'^2$;
2. $q(u) = 2x'^2 - \frac{1}{4}y'^2$;
3. $q(u) = -2x'^2 + \frac{1}{4}y'^2$;
4. $q(u) = x'y'$;
5. $q(u) = x'^2$.

Exercice 13. Soit q la forme quadratique définie dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ par $q(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2$. Donner une base, si elle existe, dans laquelle on a :

1. $q(x) = \sum_{i=1}^n i x_i^2$
2. $q(x) = \sum_{i=1}^n (-1)^i x_i^2$.

Exercice 14. Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

1. Donner l'expression en coordonnées des formes quadratiques q et q' qui leurs sont associées dans la base canonique.
2. Que peut-on dire de A et A' ?

Exercice 15. Soit q une forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^2$, dont l'écriture est donnée pour tout $u = (x, y)$ par : $q(u) = ax^2 + 2bxy + cy^2$. Montrer que q est définie positive si et seulement si $a > 0$ et $ac - b^2 > 0$.

Exercice 16. Décomposer sous forme de carré les formes quadratiques suivantes :

1. $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_2^2 + x_1x_3 + x_2x_3$;
2. $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 8x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3$;
3. $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$;
4. $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 4x_3x_4$;
5. $(*)$ $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2a(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$, avec $a \in]0, 1[$.

Dans chacun des cas, préciser le rang et la signature de ces formes quadratiques.

Exercice 17. Quelle est la signature de la forme quadratique $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par la formule suivante ?

$$q(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_1 + x_3)^2 - (x_2 - x_3)^2$$

Exercice 18. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien, $k \in \mathbb{R}$, $a \in E$ tel que $\|a\| = 1$, et $q : E \to \mathbb{R}$ l'application définie par $q(x) = 2\langle x, a\rangle^2 + k\|x\|^2$.

1. Vérifier que q est une forme quadratique sur E.
2. $(\star)$ Donner une condition nécessaire et suffisante sur k pour que q soit définie positive.

Exercice 19. Décrire les lignes de niveau suivantes

1. Dans $\mathbb{R}^2$ d'équation $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$;
2. Dans $\mathbb{R}^2$ d'équation $-7x^2 + 10\sqrt{3}xy + 3y^2 = 24$;
3. Dans $\mathbb{R}^2$ d'équation $3x^2 - 2xy - 3y^2 = 1$;
4. Dans $\mathbb{R}^2$ d'équation $3xy = 1$;
5. Dans $\mathbb{R}^3$ d'équation $xz + yz = 0$;
6. Dans $\mathbb{R}^3$ d'équation $x^2 - y^2 = 1$;
7. $(*)$Dans $\mathbb{R}^3$ d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 0$;
8. $(*)$Dans $\mathbb{R}^3$ d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

Exercice 20. $(*)$ Si $M \in GL_3(\mathbb{R})$, la matrice $A = M \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} {}^tM$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 21. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que A et $M =^t AA$ ont même rang (on pourra considérer la forme quadratique $q(X) =^t XMX$).

Exercice 22. $(*)$ Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 = 0$. Montrer que $A = 0$.