Intégrales impropres, intégrales à paramètres : exercices

Intégrales impropres

Exercice 1.
Montrez que les intégrales suivantes sont bien définies, et les calculer.

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x \;;\quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-x^3}}\,\mathrm{d}x \;;\quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 2.
Soient $a<b$ deux réels. Montrez la convergence de

$$I_{a,b} := \int_a^b \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\,\mathrm{d}x.$$

Calculez $I_{-1,1}$, et effectuez un changement de variables pour calculer $I_{a,b}$.

Exercice 3. [Monier 3 ; Oraux X-ENS, Analyse 3, p.192]

1. Montrez que l'intégrale suivante converge :

$$I := \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(x))\,\mathrm{d}x$$

2. Montrez que

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(x))\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad 2I = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin(2x)}{2}\right)\mathrm{d}x.$$

3. En déduire I.

Exercice 4. [Monier 3]

1. Montrez que les intégrales suivantes convergent :

$$I := \int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J := \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

2. À l'aide d'un changement de variables, trouvez une relation entre I et J.
3. Déduisez-en la valeur de

$$K(\alpha) := \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{\alpha^2+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 5.
Montrez que les intégrales suivantes convergent ($\alpha>0$).

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^{1-\alpha}}\,\mathrm{d}t \;;\quad \int_0^{+\infty} x e^{ix^\alpha}\,\mathrm{d}x \;;\quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}+\cos(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Intégrales et limites

Exercice 6. [Moisan, p.207]
Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. Montrez question

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f(t)\cdot nt^n \,\mathrm{d}t = f(1).$$

Exercice 7.
Pour tout $n \geq 0$ et $x \in [0,1]$, on pose :

$$g_n(x) := (n+1)(n+2)x^n(1-x).$$

1. Calculez l'intégrale de g_n.
2. Montrez que $(g_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers une fonction g que l'on précisera.
3. A-t-on
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 g_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t \quad ?$$
Commentez.

Exercice 8.
On pose $f(x) := x^{-x}$ pour tout $x \in (0,1]$, et $f(0) = 1$.

1. Montrez que, pour tout $x \in [0,1]$,
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n\ln(x)^n}{n!},$$
2. Calculez par récurrence l'intégrale
$$I_n := \int_0^1 x^n \ln(x)^n \,\mathrm{d}x.$$
3. Concluez en montrant que
$$\int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}.$$

Exercice 9.
Pour tout $n \geq 0$, on pose $I_n := \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrez que, pour tout $x \in (-1,1)$,
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{I_n}{n!}x^n = \frac{1}{1-x}.$$
2. Déduisez-en la valeur de I_n.

Exercice 10.

1. Montrez que
$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(t)^n\,\mathrm{d}t=0.$$
2. On cherche à préciser la vitesse de convergence de la suite ci-dessus. Montrez tout d'abord que, pour tout $x<1$, la suite $(1-\frac{x}{n})_{n\geq 1}$ est croissante. Quelle est sa limite ?
3. À l'aide d'un changement de variables, montrez que, pour tous a, $\beta>0$ tels que $\beta a^2<1$,
$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\int_{-a}^{a}(1-\beta t^2)^n\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\beta t^2}\,\mathrm{d}t.$$
4. Soit $\varepsilon>0$. Montrez qu'il existe $a>0$ tel que $1-(1+\varepsilon)\frac{t^2}{2}\leq\cos(t)\leq 1-(1-\varepsilon)\frac{t^2}{2}$ pour tout $t\in[-a,a]$, puis que
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(1+\varepsilon)\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t&\leq\liminf_{n\to+\infty}\sqrt{n}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(t)^n\,\mathrm{d}t\\&\leq\limsup_{n\to+\infty}\sqrt{n}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(t)^n\,\mathrm{d}t\\&\leq\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(1-\varepsilon)\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

   Concluez.

Intégrales à paramètre

Exercice 11.
Soit f une fonction continue sur $[0,+\infty)$ admettant une limite finie en $+\infty$. Montrez que
$$\lim_{\lambda\to0^+}\lambda\int_0^{+\infty}f(t)e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t=\lim_{t\to+\infty}f(t).$$

Exercice 12.
Montrez à l'aide d'un changement de variables que
$$\int_0^{+\infty}\sqrt{1+t^2}\cdot e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t\sim_{\lambda\to0^+}\frac{1}{\lambda^2}.$$

Exercice 13.
Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue bornée. Montrez la continuité, puis la dérivabilité, de la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par
$$F(x):=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-t)^2}f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 14. [Moisan, Analyse 3 ; Oraux X-ENS, Analyse 3, p.220]
On pose, pour tout x réel,
$$I:=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\quad\text{et}\quad F(x):=\int_0^1\frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrez que F est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Construisez une équation différentielle du premier ordre satisfaite par F, et déduisez-en la valeur de l'intégrale de Gauss I.

Exercice 15. [Sorosina, p. 337 ; Oraux X-ENS, Analyse 3, p.217]
On pose, lorsque cela a un sens,

$$F(x) := \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t, \quad G(x) := \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad I := \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrez que F est définie et continue de $[0,+\infty)$, ainsi que de classe $\mathcal{C}^2$ sur $(0,+\infty)$. Construisez une équation différentielle du second ordre satisfaite par F.
2. Montrez que G est définie et continue de $[0,+\infty)$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $(0,+\infty)$, et satisfait la même équation différentielle que celle satisfaite par F sur $(0,+\infty)$.
3. Montrez que F et G coïncident sur $(0,+\infty)$, puis déterminez la valeur de I.

Exercice 16.
Étudiez la régularité de la fonction F définie sur $(0,2)$ par

$$F(\alpha) := \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t.$$