Intégrale, primitives. Notes de cours.

Fonctions continues par morceaux

Définitions :
- ▷ Subdivision de $[a,b]$: suite finie $(t_i)_{0\leq i\leq n}$, strictement croissante, telle que $t_0 = a$ et $t_n = b$.
- ▷ Fonction continue par morceaux f sur $[a,b]$: il existe une subdivision $(t_i)_{0\leq i\leq n}$ telle que f est continue à valeurs complexes sur chaque intervalle ouvert (t_{i-1}, t_i), et admette des limites finies aux extrémités des intervalles. Autrement dit : $f_{|(t_{i-1},t_i}$ est restriction d'une fonction continue sur $[t_{i-1}, t_i]$.
- ▷ Fonction en escalier sur $[a,b]$: il existe une subdivision $(t_i)_{0\leq i\leq n}$ telle que f est constante sur chaque intervalle ouvert (t_{i-1}, t_i).

Attention : les valeurs prises par une telle fonction aux extrémités des intervalles de subdivision sont quelconques.

Notation : on notera $\mathcal{CM}([a,b])$ l'ensemble des fonctions complexes continues par morceaux sur $[a,b]$, et $\mathcal{E}([a,b])$ l'ensemble des fonctions complexes en escalier sur $[a,b]$.

Exemples :
- ▷ les fonctions continues sur $[a,b]$ et en escalier sur $[a,b]$ sont continues par morceaux sur $[a,b]$.
- ▷ la fonction $f : x \mapsto 1/x$ pour $x \in (0,1)$, $f(0) = 0$ n'est pas continue par morceaux sur $[0,1]$.
- ▷ la fonction $f : x \mapsto \sin(1/x)$ pour $x \in (0,1)$, $f(0) = 0$ n'est pas continue par morceaux sur $[0,1]$.

Lemme : $\mathcal{CM}([a,b])$ est un espace vectoriel. $\mathcal{E}([a,b])$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{CM}([a,b])$.

La fonction nulle est bien dans $\mathcal{E}([a,b])$ et $\mathcal{CM}([a,b])$. La stabilité par multiplication par un scalaire ne pose pas de difficulté. Difficulté : une somme de fonctions en escalier (respectivement continues par morceaux) est encore en escalier (respectivement continue par morceaux). Besoin de raffiner les subdivisions.

On montre de même : le maximum, le minimum, le produit de deux fonctions en escalier sont en escalier. La valeur absolue d'une fonction en escalier est en escalier. De même pour des fonctions continues par morceaux. Attention aux composées : on peut composer à gauche par une fonction continue, mais pas à droite, et à fortiori on ne compose pas en général les applications continues par morceaux.

Lemme : Les fonctions de $\mathcal{CM}([a,b])$ sont bornées. $\mathcal{E}([a,b])$ est dense dans $\mathcal{CM}([a,b])$ pour $\|\cdot\|_\infty$.

Existence d'une borne supérieure : application du théorème de Weierstrass (les fonctions continues sur un segment sont bornées) sur chaque segment de subdivision (la formulation en termes de restrictions est pratique ici), et tenir compte des valeurs aux extrémités des subdivisions, heureusement en nombre fini.

Densité : application du théorème de Heine (les fonctions continues sur un segment sont uniformément continues) sur chaque segment de subdivision (la formulation en termes de restrictions est pratique ici). Deux formulations possibles pour la démonstration :
- ▷ démonstration en $\varepsilon - \delta$ utilisant explicitement la définition des fonctions uniformément continues ;
- ▷ démonstration utilisant le module de continuité. Plus concise, mais il faut être à l'aise avec la notion de module de continuité.

Construction de l'intégrale

Définition : Soit f en escalier sur $[a,b]$. Soient $(t_i)_{0\leq i\leq n}$ une subdivision associée et a_i la valeur de f sur l'intervalle (t_{i-1},t_i). On pose

$$I(f):=\sum_{i=1}^{n} a_i(t_i-t_{i-1}).$$

A priori, $I(f)$ dépend de la subdivision choisie ; on peut montrer que ce n'est pas le cas, mais ce ne sera pas nécessaire pour la suite.

Lemme : Soit f continue par morceaux sur $[a,b]$ et $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions en escalier qui converge uniformément vers f. Alors la suite $(I(\varphi_n))_{n\geq 0}$ converge, et la limite ne dépend pas de la suite (φ_n).

Pour la convergence : on montre que $(I(\varphi_n))_{n\geq 0}$ est de Cauchy. Pour cela, le lemme suivant est essentiel :

Lemme : Soient f en escalier sur $[a,b]$. Alors $|I(f)|\leq (b-a)\left\|f\right\|_\infty$.
Du point de vue de l'analyse fonctionnelle : I est une fonctionnelle linéaire sur un sous-espace dense de $\mathcal{CM}([a,b])$. Pour l'étendre par continuité, il faut montrer qu'elle est (uniformément) continue, et donc qu'il existe une borne du type $|I(f)|\leq C\left\|f\right\|_\infty$.

De là, on si $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f, alors $\sup_{k,\ell\geq n}\left\|\varphi_k-\varphi_\ell\right\|_\infty$ converge vers 0, donc $\sup_{k,\ell\geq n}|I(\varphi_k)-I(\varphi_\ell)|$ aussi.

Pour montrer que la limite ne dépend pas du choix de la suite, on peut entrelacer deux suites différentes. La limite existe, et donc les deux suites que l'on a entrelacées ont la même limite.

Propriétés : L'intégrale est linéaire, vérifie la relation de Chasles. L'intégrale d'une fonction positive est positive, et $|\int_a^b f(t)dt|\leq\int_a^b|f(t)|dt$. En particulier, par linéarité, $\int_a^b f=\int_a^b Re(f)+i\int_a^b Im(f)$.
Montrer la linéarité. Le faire d'abord sur $\mathcal{E}([a,b])$, puis étendre par continuité. Les autres propriétés se montrent de façon similaire. Attention : pour la positivité, il faut montrer qu'une fonction continue par morceaux positive est limite uniforme de fonctions en escalier positives. On peut même aller plus loin, et montrer le :

Lemme : Soit f une fonction continue par morceaux et positive sur $[a,b]$. Alors il existe deux suites de fonctions en escalier $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ et $(\psi_n)_{n\geq 0}$ telles que :

- ▷ $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ et $(\psi_n)_{n\geq 0}$ convergent uniformément vers f.
- ▷ $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ est positive et croissante.
- ▷ $(\psi_n)_{n\geq 0}$ est positive et décroissante.

Pour montrer ce lemme : procéder par division dyadique de chaque intervalle de continuité. Il permet notamment de montrer :

Propriété : on munit le plan d'un repère orthonormé. Soit $f\in\mathcal{CM}([a,b])$ positive. Alors l'aire du domaine $\{(x,y):\ a\leq x\leq b,\ 0\leq y\leq f(x)\}$ vaut $\int_a^b f$. Plus généralement, pour $f,\,g\in\mathcal{CM}([a,b])$ réelle, l'aire du domaine $\{(x,y):\ a\leq x\leq b,\ \min\{f(x),g(x)\}\leq y\leq\max\{f(x),g(x)\}\}$ vaut $\int_a^b|f-g|$.

On utilisera les propriétés de l'aire :

- ▷ aire des rectangles dans une base orthonormée ;
- ▷ monotonie : si $A\subset B$, alors $\mathcal{A}(A)\leq\mathcal{A}(B)$.

La première propriété permet de montrer la propriété pour les fonctions en escalier, la seconde de passer à la limite et l'obtenir pour les fonctions continues par morceaux.

Somme de Riemann

Définition : Soient $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ bornée, $\sigma = (t_0, t_1, \cdots, t_k)$ une subdivision de $[a,b]$ et $\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_k)$ tels que $\theta_i \in [t_{i-1}, t_i]$. On appelle **somme de Riemann** de f relative à (σ, θ) la quantité

$$S(f, \sigma, \theta) := \sum_{i=1}^{k} (t_i - t_{i-1}) f(\theta_i) \ ;$$

c'est l'intégrale d'une fonction en escalier (dessin). On définit le **pas** de σ par $p(\sigma) := \max_{1 \leq i \leq k}(t_i - t_{i-1})$.

Propriété : soient $f \in \mathcal{CM}([a,b])$, (σ_n) une suite de subdivisions telles que $\lim_{n\to+\infty} p(\sigma_n) = 0$ et (θ_n) une suite de points marqués. Alors

$$\lim_{n\to+\infty} S(f, \sigma_n, \theta_n) = \int_a^b f(t) dt.$$

Le montrer pour des fonctions continues à l'aide du module de continuité (théorème de Heine, toujours). Pour des fonctions continues par morceaux, c'est plus délicat. Utiliser des fonctions en escalier majorantes/minorantes, montrer que les deux suites obtenues sont adjacentes et encadrent à la fois les sommes de Riemann et l'intégrale de f. Pour montrer qu'elles sont adjacentes, il faudra distinguer les intervalles de la subdivision qui contiennent une discontinuité de f, et utiliser un module de continuité ailleurs.

Remarque hors programme : les fonctions telles que $S(f, \sigma_n, \theta_n)$ converge quelque soit la suite de subdivisions de pas tendant vers 0 et la suite de points marqués sont dites **intégrables au sens de Riemann**. La propriété ci-dessus peut se reformuler ainsi : **les fonctions continues par morceaux sont intégrables au sens de Riemann, et l'intégrale définie précédemment et l'intégrale de Riemann coïncident.**

Il existe des fonctions qui sont intégrables au sens de Riemann sans être continues par morceaux (par exemple : $\sin(1/x)$).

Corollaire : Sommes de Riemann. Exemples, en particulier équivalent asymptotique de $\left(\sum_{n=1}^N n^\alpha\right)_{N \geq 1}$ pour $\alpha \geq 0$.

Application : Méthode des trapèzes et analyse d'erreur si f est $\mathcal{C}^1$ ou $\mathcal{C}^2$.

Application : Si $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$, alors

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(k/n) = \int_0^1 f(t) \ \mathrm{d}t - \frac{1}{2n}[f(0) - f(1)] + o(1/n).$$

Extensions possibles :

- ▷ Écrivez un programme informatique qui vous permette d'observer numériquement ces vitesses d'approximation (bonus : affichez le graphique des erreurs en fonction de n en échelle logarithmique–logarithmique).
- ▷ Appliquez ce résultat pour obtenir un développement asymptotique de $\left(\sum_{n=1}^N n^\alpha\right)_{N \geq 1}$ pour $\alpha \geq 1$.
- ▷ Montrez que le terme d'erreur peut être amélioré en $O(1/n^2)$ si f est de classe $\mathcal{C}^2$.

Primitives

Théorème : soit $f \in \mathcal{CM}([a,b])$. Soit F définie sur $[a,b]$ par $F(t) = \int_a^t f$. Alors F est continue ; si f est positive, alors F est croissante ; si f est continue et t, alors F est dérivable en t et $F't) = f(t)$. On appelle F une **primitive** de f.

On utilise simplement la borne $|F(s) - F(t)| \leq |s - t| \, \|f\|_\infty$. En particulier, si f est continue par morceaux, alors F est lipschitzienne, donc continue. La positivité vient immédiatement, la dérivabilité vient par un argument de $\varepsilon - \delta$ ou utilisant le module de continuité de f (ce qui est un peu exagéré – pour une fois, la continuité suffit).

Proposition : Intégration par partie sur un segment.

Proposition : Changement de variables sur un segment.

Application : Lemme de Riemman-Lebesgue : pour toute fonction $f \in \mathcal{CM}([a,b])$,

$$\lim_{\xi \to +\infty} \int_a^b e^{i\xi t} f(t) dt = 0.$$

Application :

- ▷ Calcul de $\int_0^\pi t(\pi - t)\cos(2nt)dt = -\frac{\pi}{2n^2}$ pour tout $n \geq 1$.
- ▷ En déduire que $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi \varphi(t)\sin((2N+1)t)dt$, où φ est une fonction continue sur $[0,\pi]$.
- ▷ Conclure à l'aide du lemme de Riemann-Lebesgue.

Convergences en moyenne, en moyenne quadratique

Définition : dans ce qui suit, on posera pour $f \in \mathcal{CM}([a,b])$,

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f|(t) \text{ d}t,$$
$$\|f\|_2 := \left(\int_a^b |f|^2(t) \text{ d}t\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Lemme : $\|\cdot\|_1$ est une semi-norme sur $\mathcal{CM}([a,b])$: elle est positive, homogène et satisfait l'inégalité triangulaire. $\|f\|_1 = 0$ si et seulement si f est à support fini.

L'exception des fonctions à support fini est un des désagréments des espaces $\mathcal{CM}([a,b])$. Ainsi, $\|\cdot\|_1$ est une norme sur $\mathcal{C}^0([a,b])$, et des passages au quotient (identifications de fonctions à nombre fini de points ou sous-ensembles négligeables près) permettent aussi d'obtenir une norme.

Théorème : Cauchy-Schwarz. Soient f, g continues par morceaux ; alors

$$\|fg\|_1 = \int_a^b |f(t)g(t)| \text{ d}t \leq \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 \text{ d}t \cdot \int_a^b |g(t)|^2 \text{ d}t} = \|f\|_2 \|g\|_2$$

Corollaire : $\|\cdot\|_2$ est une semi-norme sur $\mathcal{CM}([a,b])$.

Attention, pour les mêmes raisons, $\|\cdot\|_2$ n'est pas une norme sur $\mathcal{CM}([a,b])$. Il faut ou bien disposer d'un résultat général (pas seulement valable dans les espaces pré-hilbertiens), ou bien le redémontrer à la main. Rappelons deux techniques :

- ▷ la fonction $t \mapsto \int_a^b (|f|(t) - \lambda|g|(t))^2 \text{ d}t$ est quadratique en λ et positive, donc son discriminant est négatif.
- ▷ on utilise d'abord l'inégalité de Young $|fg| \leq \frac{|f|^2+|g|^2}{2}$, d'où

  $$\int_a^b |fg|(t) \text{ d}t \leq \frac{1}{2}\int_a^b |f|^2(t) \text{ d}t + \frac{1}{2}\int_a^b |g|^2(t) \text{ d}t.$$

  Or $|fg| = |\sqrt{\lambda} f| \cdot |\frac{1}{\sqrt{\lambda}} g|$. Donc, pour tout $\lambda > 0$,

  $$\int_a^b |fg|(t) \text{ d}t \leq \frac{\lambda}{2}\int_a^b |f|^2(t) \text{ d}t + \frac{1}{2\lambda}\int_a^b |g|^2(t) \text{ d}t.$$

  On optimise ensuite cette fonction de λ.

Exemple : Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b])$. Soit $I \subset [a,b]$ un segment. Alors $f_{|I}$ est continue par morceaux sur I, et

$$\left|\int_I f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\mathbf{1}_I(t)\,\mathrm{d}t \leq \|f\|_2\,\|\mathbf{1}_I\|_2 = \sqrt{|I|}\,\|f\|_2\,.$$

Convergences : Soient $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions continues par morceaux et f une fonction continue par morceaux. On dit que

- ▷ $(f_n)_{n\geq 0}$ converge **en moyenne** vers f si $\lim_{n\to+\infty}\|f_n - f\|_1 = 0$;
- ▷ $(f_n)_{n\geq 0}$ converge **en moyenne quadratique** vers f si $\lim_{n\to+\infty}\|f_n - f\|_2 = 0$.

Comparaisons de normes : On sait déjà que

$$\|f\|_1 \leq (b-a)\,\|f\|_\infty\,.$$

En effet, $|f| \leq \|f\|_\infty$, et on intègre cette inégalité. La norme $\|\cdot\|_2$ vient se placer entre les deux. En effet, l'exemple précédent implique en particulier que

$$\|f\|_1 \leq \sqrt{b-a}\,\|f\|_2\,,$$

tandis que la borne $\|f\|_2 \leq \sqrt{b-a}\,\|f\|_\infty$ s'obtient par intégration de l'inégalité grossière $|f|^2 \leq \|f\|_\infty^2$.

En particulier, si une suite de fonctions continues par morceaux converge uniformément vers une fonction continue par morceaux, alors elle converge en moyenne quadratique ; si elle converge en moyenne quadratique, alors elle converge en moyenne.

Exercice : calculer $\|f\|_1$, $\|f\|_2$ et $\|f\|_\infty$, où

- ▷ $f = a\mathbf{1}_I$, $a \in \mathbb{C}$ et I est un intervalle ;
- ▷ $f(x) = x^\alpha \mathbf{1}_[0,1]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ (si $\alpha < 0$, l'intégrale et à comprendre comme la limite quand $\varepsilon \to 0$ des intégrales sur $[\varepsilon, 1]$).

Exercice : Trouver des suites de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ et des fonctions f telles que :

- ▷ $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers f en moyenne mais pas en moyenne quadratique ;
- ▷ $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers f en moyenne quadratique mais pas uniformément.

Intégrales impropres

Définition

Définition 0.1. *Soit $I = (a,b)$ un intervalle ouvert (potentiellement, $a = -\infty$ ou $b = +\infty$. Soit $f : I \to \mathbb{C}$ telle que, pour tout segment $[c,d] \subset I$, la restriction de f à $[c,d]$ soit continue par morceaux.*

Soit $x_0 \in I$. Si les limites

$$\lim_{c\to a}\int_{x_0}^c f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \lim_{d\to b}\int_{x_0}^d f(t)\,\mathrm{d}t$$

existent et sont réelles, alors on définit

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t := \lim_{c\to a}\int_{x_0}^c f(t)\,\mathrm{d}t + \lim_{d\to b}\int_{x_0}^d f(t)\,\mathrm{d}t,$$

*et on dit que cette intégrale est **convergente** ; sa nature et sa valeur ne dépendent alors pas du choix de x_0. Sinon, on dit que cette intégrale est divergente.*

Il y a des variations de ces définitions si on ne prend la limite qu'à droite ou qu'à gauche.
Attention : Il faut bien que les deux limites existent séparément. Par exemple, on ne définit pas

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \, \mathrm{d}x = \lim_{T\to+\infty} \int_{-T}^{T} x \, \mathrm{d}x = 0.$$

Il y a finalement assez peu de choses à dire sur les intégrales impropres.

Lemme 0.2. *L'ensemble des fonctions dont l'intégrale converge sur un intervalle donné est un espace vectoriel.*
La relation de Chasles est vérifiée.

On peut concevoir des énoncés d'intégration par parties ou de changement de variables. Par exemple,

Proposition 0.3.
Soient f, $g \in \mathcal{C}^1([a,b),\mathbb{R})$. Alors :
- ▷ *Si $\lim_{t\to b^-} f(t)g(t)$ existe, alors $\int_a^b f'(t)g(t) \, \mathrm{d}t$ et $\int_a^b f(t)g'(t) \, \mathrm{d}t$ sont de même nature.*
- ▷ *Si de plus ces deux intégrales convergent, alors*

$$\int_a^b f'(t)g(t) \, \mathrm{d}t = \lim_{t\to b^-} f(t)g(t) - \int_a^b f(t)g'(t) \, \mathrm{d}t.$$

Cependant, de tels énoncés sont sans intérêt. La morale sera toujours la même : si on veut faire des intégration par parties ou des changements de variables avec des intégrales impropres, on procède en deux temps :
- ▷ On se restreint à un segment, et on procède à l'intégration par parties ou au changement de variables sur ce segment.
- ▷ On fait tendre les bornes du segment vers les bornes de I.

Fonctions positives et comparaisons

Lemme 0.4. *Soient f, g deux fonctions* ***positive*** *définies sur un intervalle I et continues par morceaux sur tout segment. Si $f = O(g)$ et g est d'intégrale convergente, alors l'intégrale de f est convergente.*
Par contraposition : si $f = O(g)$ et l'intégrale de f est divergente, alors l'intégrale de g est divergente.
En particulier, si $f = \Theta(g)$ ou $f \sim g$, alors les intégrales de f et de g sont de même nature.

Ce lemme, ainsi qu'une collection de fonctions intégrables ou non, permet de montrer la convergence ou la divergence de nombreuses intégrales. Sont convergentes :

$$\int_0^{1/2} t^\alpha \ln(t)^\beta \, \mathrm{d}t \quad \forall \alpha > -1, \ \forall \beta \in \mathbb{R} \ ;$$
$$\int_0^{1/2} t^{-1} |\ln(t)|^\beta \, \mathrm{d}t \quad \forall \beta < -1 \ ;$$
$$\int_2^{+\infty} t^\alpha \ln(t)^\beta \, \mathrm{d}t \quad \forall \alpha < -1, \ \forall \beta \in \mathbb{R} \ ;$$
$$\int_2^{+\infty} t^{-1} \ln(t)^\beta \, \mathrm{d}t \quad \forall \beta < -1.$$

De même, sont divergentes :

$$\int_0^{1/2} t^\alpha \ln(t)^\beta \,\mathrm{d}t \quad \forall\alpha < -1,\ \forall\beta \in \mathbb{R}\ ;$$
$$\int_0^{1/2} t^{-1} |\ln(t)|^\beta \,\mathrm{d}t \quad \forall\beta \geq -1\ ;$$
$$\int_2^{+\infty} t^\alpha \ln(t)^\beta \,\mathrm{d}t \quad \forall\alpha > -1,\ \forall\beta \in \mathbb{R}\ ;$$
$$\int_2^{+\infty} t^{-1} \ln(t)^\beta \,\mathrm{d}t \quad \forall\beta \geq -1.$$

Exercice : Que dire de

$$\frac{1}{t\ln(t)\ln(\ln(t))}\ ?$$

Généralisez les critères ci-dessus.

Dans le cas d'intégrales positives divergentes, on peut de plus comparer les vitesses de divergence.

Lemme 0.5. *Soient f, g deux fonctions* ***positive*** *définies sur un intervalle $[a, b)$ et continues par morceaux sur tout segment. Si $f \sim g$ aux bords de l'intervalle et si $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, alors*

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \sim_{x\to b-} \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t.$$

La démonstration se fait en choisissant x_0 tel que $(1-\varepsilon)g \leq f \leq (1+\varepsilon)g$ sur $[x_0, b)$, puis en découpant l'intégrale suivant $[a, x_0)$ et $[x_0, x]$. Le premier morceau reste constant, et le second tend vers $+\infty$ à la même vitesse (à ε près) pour f et pour g.

Application : Sans calcul lourd, donner un équivalent asymptotique de $\int_0^x \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

On peut aussi comparer séries et intégrales. En général, les intégrales sont plus faciles à calculer que les séries ; cela permet donc d'encadrer des séries, ou de montrer que des séries sont de même nature que des intégrales.

Proposition 0.6. *Soit $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ continue par morceaux sur chaque segment et décroissante. Alors*

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k) \geq \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t \geq \sum_{k=1}^{n} f(k).$$

Il faut savoir adapter cet énoncé (si f est croissante, si f est définie sur un intervalle du type $[3, +\infty)$...).

Exemple : Donnez des encadrements des séries suivantes :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\ ; \quad \sum_{k=1}^n k^\alpha,\ \alpha \geq 0\ ; \qquad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha},\ \alpha \geq -1.$$

Conséquence 0.7. *Soit $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ continue par morceaux sur chaque segment, positive et décroissante. Alors la série de terme général*

$$f(n) - \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$$

converge.

En effet, les termes de cette série sont positifs, et la somme des n premiers termes est bornée par $f(0) - f(n) \leq f(0)$.

Application : Série harmonique et définition de la constante d'Euler.

Fonctions intégrables

Définition 0.8. *Soit $I = (a, b)$ un intervalle ouvert (potentiellement, $a = -\infty$ ou $b = +\infty$. Soit $f : I \to \mathbb{C}$ telle que, pour tout segment $[c, d] \subset I$, la restriction de f à $[c, d]$ soit continue par morceaux.*

*On dit que f est **intégrable** sur I si l'intégrale de $|f|$ converge.*

Lemme 0.9. *Si f est intégrable sur I, alors son intégrale sur I converge.*

Les propriétés suivante restent vérifiées : stabilité par combinaisons linéaires, linéarité de l'intégrale, positivité sur les fonctions positives, relation de Chasles...

Le produit de deux fonctions intégrables n'est en général pas intégrable.

Posons $I = [a, b)$ pour simplifier. La convergence de la fonction $\int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t$ vient de deux faits :

- ▷ D'une part, $\lim_{x \to b^-} \int_x^b |f|(t)\, \mathrm{d}t = 0$, car il cette quantité est la différence entre $\int_a^x |f|(t)\, \mathrm{d}t$ et sa limite, qui existe.
- ▷ D'autre part, pour tous y, $y' > x$, on a $|\int_y^{y'} f(t)\, \mathrm{d}t| \leq \int_x^b |f|(t)\, \mathrm{d}t$.

La famille d'intégrales $(\int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t)$ est donc de Cauchy, donc converge quand x tend vers b^-.

Exercice : Construisez une fonction intégrable sur $[0, +\infty)$, mais ne convergeant pas vers 0 en $+\infty$ (version plus difficile : continue et non bornée).

Exercice : Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, +\infty), \mathbb{R})$. Montrez que si f' est intégrable, alors f est bornée.

Fonctions non intégrables

Il existe des fonctions non intégrables dont l'intégrale converge néanmoins. Le cas typique est l'**intégrale de Dirichlet** :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, \mathrm{d}t := \lim_{T \to +\infty} \int_0^T \frac{\sin(t)}{t}\, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice : Montrer que l'intégrable converge, mais que la fonction sinus cardinal $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ n'est pas intégrable, de deux façons différentes :

- ▷ en découpant l'intégrale en morceaux bien choisis ;
- ▷ en procédant à des intégrations par parties. Pour montrer que le sinus cardinal n'est pas intégrable, on pourra utiliser la minoration $|\sin(t)| \geq \sin(t)^2$.

La plupart des exemples sont de la même trempe, ou s'y ramènent après des manipulations élémentaires (par exemple un changement de variables). Citons par exemple :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha},\ \alpha \in (0, 2)\ ; \quad \int_0^{+\infty} te^{it^\alpha},\ \alpha > 0,$$

le dernier exemple étant un exemple d'intégrale convergente d'une fonction de convergeant pas vers 0.

Il existe un critère relativement général (critère d'Abel) couvrant ces exemples. Si $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ est continue et décroît vers 0, si $g : [a, b) \to \mathbb{R}$ est continue et $x \mapsto |\int_a^x g(t)\, \mathrm{d}t|$ est bornée, alors $\int_a^b f(t)g(t)\, \mathrm{d}t$ converge. Il n'est pas forcément très important de le retenir.

Retour sur la convergence en moyenne quadratique

On dispose toujours de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, qui a des conséquences intéressantes.

Lemme 0.10. *Soit $I = (a, b)$ un intervalle ouvert (potentiellement, $a = -\infty$ ou $b = +\infty$. Soient f, $g : I \to \mathbb{C}$ telles que, pour tout segment $[c, d] \subset I$, les restrictions de f e de g à $[c, d]$ soient continues par morceaux.*
Si f^2 et g^2 sont intégrables, alors fg aussi, et $|\int_I fg|^2 \leq \int_I |f|^2 \cdot \int_I |g|^2$.

Exercice : Montrez que si f^2 et $(f')^2$ sont intégrables, alors f est bornée (indice : dérivez la fonction f^2, puis intégrez-la).

Cependant, si I est non borné, alors les inégalités entre normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont plus valables.

Exercice : Trouver des suites de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ et des fonctions f sur $\mathbb{R}$ telles que :
- ▷ $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers f uniformément mais pas en moyenne quadratique ;
- ▷ $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers f en moyenne quadratique mais pas en moyenne.

Convergences monotone, convergence dominée, intégration terme à terme

Voir le programme pour les énoncés et la feuille d'exercices pour des applications. **Les énoncés du programme sont à connaître et à savoir appliquer.**

Le théorème de convergence monotone a deux applications principales :
- ▷ démontrer le théorème de convergence dominée ;
- ▷ justifier des interversions somme-intégrales pour des séries à termes positifs.

Quelques applications à des suites de fonctions croissantes existent (voir par exemple une application aux intégrales de Wallis dans la feuille d'exercices), et justifient de retenir ce théorème et de vérifier s'il est applicable. Quand il est applicable, il est plus facile de justifier ses hypothèses que celles du théorème de convergence dominée.

Ces théorèmes ont **beaucoup** d'applications en théorie des probabilités, qui sont gênées par le fait que l'on a besoin d'une autre théorie de l'intégration pour la majorité des exemples (qui ne nécessite notamment pas de convergence simple, et permet de travailler avec des fonctions beaucoup plus générales que continues par morceaux).

Nous allons maintenant détailler les applications aux séries de fonctions.

Interversions somme-intégrales

On peut toujours intervertir l'ordre d'une somme finie : étant donnée une famille de nombres complexes $(a_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$,

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}$$

En effet, cela revient à sommer par lignes/colonnes ou par colonnes/lignes sur un rectangle.

Quand les sommes sont infinies, la situation est plus complexe. Il est possible de construire des exemples pour lesquels l'ordre des sommes a de l'importance. Si des exemples donnant lieu à des formes indéterminées (du type $\infty - \infty$) sont faciles à créer, en voici un plus frappant :

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & -1 & 1 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

La stratégie est la suivante : on veut que les sommes des lignes soient 1, 0, 0... et les sommes des colonnes soient 0, 0, 0... Pour cela, on commence par fixer la première ligne, puis la première colonne, puis la seconde ligne, etc. L'exemple ainsi obtenu est tel que :

$$\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty} a_{ij} = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{+\infty} a_{ij} = 0.$$

Afin de pouvoir intervertir des sommes, ils faut rajouter des conditions supplémentaires. Le même problème se pose avec des interversions sommes-intégrales [1]

Le théorème de convergence monotone fournit un premier critère.

Théorème 0.11 (Théorème de convergence monotone)**.**
Soit (f_n) *une suite de fonctions* ***positives*** *et* S *une fonction continue par morceaux sur* I*. Supposons que* $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = S(x)$ *pour tout* $x \in I$*.*
Alors S *est intégrable sur* I *si et seulement si* $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n < +\infty$*, et en ce cas,*

$$\int_I S(t)dt = \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)dt.$$

Le théorème de convergence dominée fournit un second critère.

Théorème 0.12 (Théorème de convergence dominée)**.**
Soit (f_n) *une suite de fonctions à valeurs complexes et* S *une fonction continue par morceaux sur* I*. Supposons que* $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = S(x)$ *pour tout* $x \in I$*, et que les sommes partielles* $\sum_{k=0}^{n} f_k$ *sont majorées par une fonction intégrable : il existe une fonction* g *intégrable sur* I *telle que* $|\sum_{k=0}^{n} f_k(x)| \leq g(x)$ *pour tous* $x \in I$ *et* $n \geq 0$*.*
Alors S *est intégrable sur* I *et*

$$\int_I S(t)dt = \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)dt.$$

On ne mémorisera pas ce critère , qui peut être remplacé par le théorème d'intégration terme à terme, plus facile à utiliser et la grande majorité du temps suffisant. Si nécessaire, il vaut mieux savoir le retrouver à partir du théorème de convergence dominée. Quoiqu'il en soit, il y a en gros deux critères assurant l'interversion d'une somme et d'une intégrale :

- ▷ la **positivité** des termes [2], *via* le théorème de convergence monotone ;
- ▷ la **domination** des sommes partielles [3], *via* le théorème de convergence dominée.

Le premier critère est plus facile à utiliser, et à essayer en premier. S'il ne fonctionne pas, passez au second.

Exercice : Montrez que

$$\int_{-1}^{1} e^t \,\mathrm{d}t = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!},$$

en utilisant dans un premier temps le théorème de convergence dominée, puis le théorème d'intégration terme à terme.

1. Au sens de la théorie de la mesure, les sommes ne sont que des cas particuliers d'intégrales ; il n'est pas étonnant d'avoir une théorie similaire dans les deux cas.
2. C'est une forme du théorème de Fubini-Tonelli.
3. C'est une forme du théorème de Fubini-Lebesgue.

Perte de masse

Discutons brièvement certains cas importants où le théorème de convergence dominée ne s'appliquent pas. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions positives intégrables convergeant simplement vers une fonction continue par morceaux f. Il y a deux phénomènes pouvant faire que $\int_I f \neq \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n$:

- ▷ la concentration de la masse en un point (ou un ensemble négligeable) ;
- ▷ la fuite de la masse en l'infini.

Le premier phénomène est illustré par exemple par $f_n := n\mathbf{1}_{(0,1/n]}$. Toutes les fonctions f_n sont d'intégrale 1, mais la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle, d'intégrale nulle.

Le second phénomène est illustré par exemple par $f_n := \mathbf{1}_{(n,n+1]}$. Toutes les fonctions f_n sont d'intégrale 1, mais la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle, d'intégrale nulle.

Il peut être intéressant, lors de l'étude d'une suite de fonctions, de tracer les graphes des fonctions f_n afin de deviner si l'un de ces phénomènes peut être présent. Remarquons au passage que le théorème de convergence dominée est remarquablement précis, en ce qu'il empêche de façon économe les deux types de "perte de masse".

Enfin, pour aller plus loin, le premier type de perte de masse peut être corrigé en travaillant avec des *mesures* au lieu de fonctions. Dans le premier exemple, la suite de fonction f_n converge vers un Dirac δ_0, qui est d'intégrale 1 ; en généralisant les objets limites, on élimine ce défaut. Le second type de perte de masse continue d'exister même dans ce cadre plus général.

Intégrales à paramètres

Voir le programme pour les énoncés et la feuille d'exercices pour des applications. **Les énoncés du programme sont à connaître et à savoir appliquer.**

Dans ce cadre, on se donne deux intervalles I, J et une fonction $f : I \times J \to \mathbb{R}$. On s'intéresse aux propriétés, notamment de régularité (continuité, dérivabilité...) de

$$F : x \mapsto \int_J f(x,t)\ \mathrm{d}t.$$

Remarque sur l'énoncé de dérivation : en pratique, on demande de montrer qu'une telle intégrale est non seulement dérivable, mais $\mathcal{C}^1$, ce que n'affirme pas l'énoncé au programme ! De plus, la représentation intégrale de F' n'est a priori pas définie dans le cadre des fonctions continues par morceaux. On pourra modifier légèrement cet énoncé :

Theorem 0.13 (Théorème de dérivation)**.**
Soient X et I deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $X \times I$ et à valeurs complexes. Supposons que :

- ▷ *pour tout x dans X, la fonction partielle $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I.*
- ▷ *pour tout x dans X et $t \in I$, la dérivée partielle $f'_x(x,t)$ existe.*
- ▷ *continuité en le paramètre : pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f'_x(x,t)$ est continue.*
- ▷ ***continuité par morceaux des dérivées partielles :** pour tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto f'_x(x,t)$ est continue par morceaux sur les segments de I.*
- ▷ *domination de la dérivée : il existe une fonction g intégrable sur I telle que $|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)| \leq g(t)$ pour tous $x \in X$ et $t \in I$.*

Soit

$$F : \left\{ \begin{array}{ccc} X & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \int_I f(x,t)dt \end{array} \right. .$$

Alors F est $\mathcal{C}^1$ sur X, et pour tout $x \in X$,

$$F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt.$$

Convergence uniforme sur les compacts

Quand on travaille avec des fonctions définies sur des ouverts, la notion de convergence uniforme est souvent trop forte. On la remplace par exemple par la notion de **convergence uniforme sur les compacts**.

Définition 0.14. *Soit I un intervalle réel, $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{C}$ et $f : I \to \mathbb{C}$. On dit que $(f_n)_{n\geq 0}$* ***converge uniformément sur tout compact*** *vers f si, pour tout compact $K \subset I$,*

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in K} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Si I est compact, cela coïncide avec la notion de convergence uniforme. Si $I = \mathbb{R}$, il suffit de vérifier la convergence par exemple sur les intervalles de la forme $[-N, N]$. Si $I = \mathbb{R}_+^*$, on pourra par exemple vérifier la convergence sur les intervalles de la forme $[1/N, N]$ (ou $[1/N^2, N]$, par exemple, si cela s'avère plus pratique).

La continuité étant une notion locale, si (f_n) converge uniformément sur un compact K vers f et toutes les fonctions f_n sont continues, alors f est continue sur l'intérieur de K. En particulier, si I est un ouvert de $\mathbb{R}$, les fonctions f_n sont continues et la suite (f_n) converge uniformément sur tout compact vers f, alors f est continue sur I.

Exemple : Prenons $f_x(t) := xt$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Alors la famille de fonction $(xt)_{x>0}$ ne converge pas uniformément vers 0 quand x tend vers 0, mais elle converge uniformément sur tout compact vers 0, donc la fonction nulle est continue.

Pour un exemple plus intéressant, considérer la convergence de $(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!})_{n\geq 0}$, ou de séries entières sur leur disque de convergence.

Revenons à nos moutons. La même problématique se pose pour les intégrales à paramètre : en général, l'intégrale sera défini pour des paramètres dans un intervalle ouvert, et on contrôlera mal l'intégrale prêt des bords de cet ouvert. Par exemple, on n'arrivera pas à trouver de fonction de domination valable pour un intervalle ouvert entier. Dans ce cas, on travaillera sur des compacts ; on montrera que la fonction définie par une intégrale à paramètre sera continue ou $\mathcal{C}^1$ sur tout compact. Une méthode fréquente consistera donc à :

- ▷ se restreintre à un segment $[A, B]$;
- ▷ utiliser les théorèmes du programme pour montrer la continuité sur $[A, B]$;
- ▷ conclure par le fait que $[A, B]$ étant arbitraire (ou pouvant être choisi arbitrairement grand), la fonction considérée est continue partout.

Intervalles compacts

Dans le cas compact, on peut travailler à la main avec le théorème de convergence dominée. Pour simplifier, on se place dans le cadre de fonctions continues.

Proposition 0.15. *Soit $f \in \mathcal{C}^0((a, b) \times [c, d], \mathbb{C})$. Alors la fonction F définie sur (a, b) par*

$$F(x) := \int_c^d f(x, t)\, \mathrm{d}t$$

est continue.

Pour démontrer cet énoncé, on se place dans un compact $[A, B]$ de (a, b), et on utilisera simplement les bornes

$$|F(x) - F(y)| \leq \int_c^d |f(x, t) - f(y, t)|\, \mathrm{d}t \leq (d - c)\omega_f(|x - y|),$$

où ω_f est le module de continuité de f sur $[A, B]$. La fonction F est donc continue sur $[A, B]$. Le segment $[A, B]$ étant arbitraire, la fonction F est continue sur (a, b).

L'énoncé de dérivation correspondant se montre de façon similaire :

Proposition 0.16. *Soit $f \in \mathcal{C}^1((a,b) \times [c,d], \mathbb{C})$ (c'est-à-dire que f se prolonge en une fonction $\mathcal{C}^1$ sur un voisinage de $(a,b) \times [c,d]$). Alors la fonction F définie sur (a,b) par*

$$F(x) := \int_c^d f(x,t)\, \mathrm{d}t$$

est de classe $\mathcal{C}^1$.

Application : fonction Gamma

Le cas typique d'application est celui de la fonction Γ.

Définition 0.17. *On pose, lorsque l'intégrale de droite converge,*

$$\Gamma(s) := \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t}\, \mathrm{d}t.$$

La fonction Γ est définie pour tout s tel que $\mathrm{Re}(s) > 0$; il est possible de l'étendre par prolongement analytique à $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$. De plus, une récurrence ou un calcul utilisant les fonctions génératrices permet de montrer que, pour tout $n \geq 0$,

$$\Gamma(1+n) = n!.$$

La fonction Γ permet donc d'étendre la factorielle aux complexes de partie réelle > -1.

Proposition 0.18. *La fonction Γ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $(0, +\infty)$.*

Formellement, pour tout $s > 0$ et tout $k \geq 0$,

$$\Gamma^{(k)}(s) = \int_0^{+\infty} (\ln(t))^k t^{s-1} e^{-t}\, \mathrm{d}t. \tag{1}$$

La fonction $t \mapsto (\ln(t))^k t^{s-1} e^{-t}$ est bien intégrable pour tout $s > 0$ et tou $k \geq 0$. On va démontrer par récurrence que Γ est de classe $\mathcal{C}^k$ et que sa dérivée k-ième est bien donnée par la formule ci-dessus.

Pour $k = 0$, il faut seulement montrer la continuité de Γ. On va travailler sur des compacts de $(0, +\infty)$. Soient $0 < A < B$. Alors :

- ▷ pour tout $t > 0$, la fonction $s \mapsto t^{s-1} e^{-t}$ est continue sur $[A, B]$.
- ▷ pour tout $s \in [A, B]$, la fonction $t \mapsto t^{s-1} e^{-t}$ est continue sur $(0, +\infty)$.
- ▷ pour tous $s \in [A, B]$ et $t > 0$,

  $$|t^{s-1} e^{-t}| \leq t^{A-1} e^{-t} \mathbf{1}_{(0,1]}(t) + t^{B-1} e^{-t} \mathbf{1}_{(1,+\infty)}(t),$$

  et la fonction de droite est intégrable sur $(0, +\infty)$.

Par le théorème de convergence dominée, la fonction Γ est continue sur $[A, B]$. L'intervalle $[A, B]$ étant arbitraire, la fonction Γ est continue sur $(0, +\infty)$.

Montrons maintenant l'hérédité. Soit $k \geq 0$. Supposons que Γ est de classe $\mathcal{C}^k$ et que $\Gamma^{(k)}$ est donnée par l'Équation (1). Fixons encore une fois $0 < A < B$. Alors :

- ▷ pour tout $s \in [A, B]$, la fonction $t \mapsto (\ln(t))^k t^{s-1} e^{-t}$ est intégrable sur $(0, +\infty)$.

- ▷ pour tous $s \in [A, B]$ et $t > 0$, la dérivée partielle $\frac{\partial (\ln(t))^k t^{s-1} e^{-t})}{\partial s}(s,t) = (\ln(t))^{k+1} t^{s-1} e^{-t}$ existe.
- ▷ pour tout $t > 0$, la fonction $s \mapsto (\ln(t))^{k+1} t^{s-1} e^{-t}$ est continue.
- ▷ pour tout $s \in [A, B]$, la fonction $t \mapsto (\ln(t))^{k+1} t^{s-1} e^{-t}$ est continue par morceaux sur $(0, +\infty)$.
- ▷ pour tous $s \in [A, B]$ et $t > 0$,

$$|\ln(t)^{k+1} t^{s-1} e^{-t}| \leq |\ln(t)|^{k+1} t^{A-1} e^{-t} \mathbf{1}_{(0,1]}(t) + |\ln(t)|^{k+1} t^{B-1} e^{-t} \mathbf{1}_{(1,+\infty)}(t),$$

et la fonction de droite est intégrable sur $(0, +\infty)$.

Donc $\Gamma^{(k)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[A, B]$, et sa dérivée est donnée par l'Équation (1). L'intervalle $[A, B]$ étant arbitraire, l'hérédité est démontrée.

Remarque : On peut montrer (ce n'est pas évident !) que $\Gamma'(1) = \gamma$ est la constante d'Euler-Mascheroni.

Application : transformée de Laplace

Définition 0.19. *Soit $f : [0, +\infty)$ continue par morceaux sur tout segment. On pose, lorsque l'intégrale de droite converge,*

$$\mathcal{L}(f)(\lambda) := \int_0^{+\infty} f(t) e^{-\lambda t} \, \mathrm{d}t.$$

La fonction $\mathcal{L}$ est la ***transformée de Laplace*** *de f.*

Proposition 0.20. *Si f est bornée, alors $\mathcal{L}(f)$ est définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $(0, +\infty)$.*
Plus généralement, s'il existe $\Lambda > 0$ et $C > 0$ telles que $f(t) \leq Ce^{\Lambda t}$ pour tout t, alors $\mathcal{L}(f)$ est définie sur $(\Lambda, +\infty)$ et $\mathcal{C}^\infty$ sur cet intervalle.

Exercice : Calculer $\mathcal{L}(\sin)$ et $\mathcal{L}(\cos)$.
Exercice : Montrez que, si f est continue et bornée, alors

$$f(0) = \lim_{\lambda \to +\infty} \lambda \mathcal{L}(f)(\lambda).$$

Exercice : Montrez que, si f est intégrable, alors

$$\int_0^{+\infty} f(t) \, \mathrm{d}t = \mathcal{L}(f)(0).$$

Exercice : Montrez que, si f a une limite finie en l'infini, alors

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{\lambda \to 0^+} \lambda \mathcal{L}(f)(\lambda).$$

Exercice : Montrez que, si f est bornée et $L := \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(s) \, \mathrm{d}s$ existe, alors

$$L = \lim_{\lambda \to 0^+} \lambda \mathcal{L}(f)(\lambda).$$

Exercice : Quel lien y a-t-il entre $\mathcal{L}(f)$ et $\mathcal{L}(f')$, où $f : [0, +\infty)$ est $\mathcal{C}^1$ de dérivée bornée ?

Application : transformée de Fourier

Définition 0.21. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ intégrable. On pose, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,*

$$\hat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i\xi t} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

*La fonction $\hat{f}$ est la **transformée de Fourier** de f.*

Attention : il y a différentes normalisations de la transformée de Fourier (intégrale de $e^{-i\xi t}f(t)$, voire de $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-i\xi t}f(t)$). Vérifiez toujours les conventions utilisées !

De plus, $\hat{f}$ peut être défini pour des fonctions non intégrables, ou pour des paramètres complexes.

Intuition : En général, la transformée de Fourier échange régularité et décroissance à l'infini. Si f est très régulière, alors $\hat{f}$ décroît très vite à l'infini ; réciproquement, si f décroît très vite à l'infini, alors $\hat{f}$ est très régulière.

Lemme 0.22. *Soit f une fonction intégrable. Alors $\hat{f}$ est continue, tend vers 0 en $\pm\infty$, et*

$$\left\|\hat{f}\right\|_\infty \leq \|f\|_1 .$$

Le premier item est une conséquence directe de la continuité des intégrales à paramètre, le second une extension du lemme de Riemann-Lebesgue aux fonctions intégrables, et le troisième une inégalité simple.

Exercice : Soit $k \geq 0$. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$, telle que f, f', ..., $f^{(k)}$ soient intégrables.

1. Montrez que f, f', ..., $f^{(k-1)}$ convergent vers 0 en l'infini.
2. Montrez par intégration par parties que, pour tout $\xi \neq 0$,

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi i)^k \xi^k}\widehat{(f^{(k)})}(\xi).$$

3. Concluez en montrant que $\hat{f}(\xi) = o(\xi^{-k})$ en $\pm\infty$.

Exercice : Soit $k \geq 0$. Soit f une fonction telle que $x \mapsto (1+|x|^k)f(x)$ soit intégrable. Montrez que $\hat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^k$, et que

$$\hat{f}^{(k)}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i\xi t}(-2\pi i t)^k f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Application : convolution

Définition 0.23. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ intégrable et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ bornée (les deux fonctions sont continues par morceaux sur les segments). On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$f \star g(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

On définit de même $f \star g$ quand f est bornée et g intégrable, ou encore quand f^2 et g^2 sont tous deux intégrables.

Remarque : On a respectivement, dans ces trois cas,

$$\begin{aligned}\|f \star g\|_\infty &\leq \|f\|_1 \, \|g\|_\infty \, , \\ \|f \star g\|_\infty &\leq \|f\|_\infty \, \|g\|_1 \, , \\ \|f \star g\|_\infty &\leq \|f\|_2 \, \|g\|_2 \, .\end{aligned}$$

Remarque : On peut définir $f \star g$ dans un cadre plus général, mais il faut alors une théorie plus générale de l'intégration. Par exemple, si f et g sont intégrables, alors *formellement* $\|f \star g\|_1 \leq \|f\|_1 \, \|g\|_1$ (cette inégalité est satisfaite si f et g sont continues par morceaux sur des segments), mais la fonction $f \star g$ peut ne pas être définie partout (prendre par exemple $f(t) = g(t) = \frac{1}{\sqrt{|t|}}\mathbf{1}_{[-1,1]}(t)$).

Remarque : $f \star g = g \star f$.

Les théorèmes de dérivation sous l'intégrale permettent de montrer qu'en général, la régularité de $f \star g$ est la "somme" des régularités de f et de g. Nous donnons (sans démonstration) deux énoncés possibles.

Proposition 0.24. *Soient f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Supposons que f est intégrable et g, g', ..., $g^{(k)}$ sont continues bornées. Alors $f \star g$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$, et*

$$(f \star g)^{(k)} = f \star g^{(k)}.$$

Proposition 0.25. *Soit f continue par morceaux sur un segment et $g \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Alors $f \star g$ est bien définie, de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$, et*

$$(f \star g)^{(k)} = f \star g^{(k)}.$$