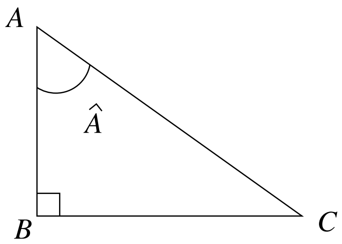
I. Trigonométrie

1 Rappels dans un triangle rectangle

On considère un triangle ABC rectangle en B, et l'angle $\hat{A}$ (aussi noté $\widehat{BAC}$ si on veut préciser le triangle considéré).



Définition 1.

- $\cos(\hat{A}) = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$
- $\sin(\hat{A}) = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$
- $\tan(\hat{A}) = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{\sin(\hat{A})}{\cos(\hat{A})}$

Remarque. $\cos(\hat{A}), \sin(\hat{A}), \tan(\hat{A})$ *sont des valeurs sans unité car ce sont les quotients de 2 longueurs.*

Théorème 2 (Pythagore)**.** Un triangle ABC est rectangle en B si et seulement si $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

2 Cercle trigonométrique

On trace un axe horizontal orienté vers la droite et un axe vertical orienté vers le haut, se croisant en une origine O. On trace le cercle de centre O de rayon 1 (pour une certaine unité). Ce cercle, muni du sens indiqué sur la figure 1 est appelé **cercle trigonométrique** ; le sens trigonométrique est le sens inverse des aiguilles d'une montre.
On place le point I de coordonnées $(1, 0)$ (c'est-à-dire le point à l'intersection du cercle et de l'axe horizontal, à droite de O). Un point M sur le cercle représente l'angle orienté allant du segment $[OI]$ vers le segment $[OM]$. Le point M est également déterminé par la longueur α de l'arc de cercle allant de I à M. Cette longueur est la **mesure en radians** de cet angle.

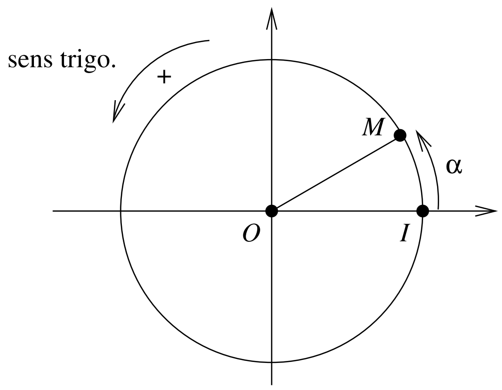


FIGURE 1 – Le cercle trigonométrique, un point M sur le cercle et α la longueur de l'arc de cercle entre I et M ; α est aussi la mesure en radians de l'angle orienté représenté par M.

Degrés et radians
Le périmètre du cercle trigonométrique vaut $2\pi R = 2\pi$ car le rayon est $R = 1$. Ceci équivaut à un tour complet, donc 2π radians = 360 degrés. Les mesures en degrés et en radians étant proportionnelles, ceci conduit au tableau de correspondance suivant entre degrés et radians. Les principaux angles en radians sont représentés sur la figure 2.
Dans la suite du cours, les angles seront toujours en radians, et on ne précisera plus l'unité "radians".

Remarque. Sur un cercle quelconque, la mesure d'un angle en radians est la longueur de l'arc de cercle correspondant à cet angle, divisée par le rayon du cercle. C'est un quotient de longueurs, donc une valeur sans unité. C'est ce qui explique qu'on omet de préciser "radians" quand on parle d'angle.

angle en degrés	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$360°$
angle en radians	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	2π

$\times \frac{\pi}{180}$

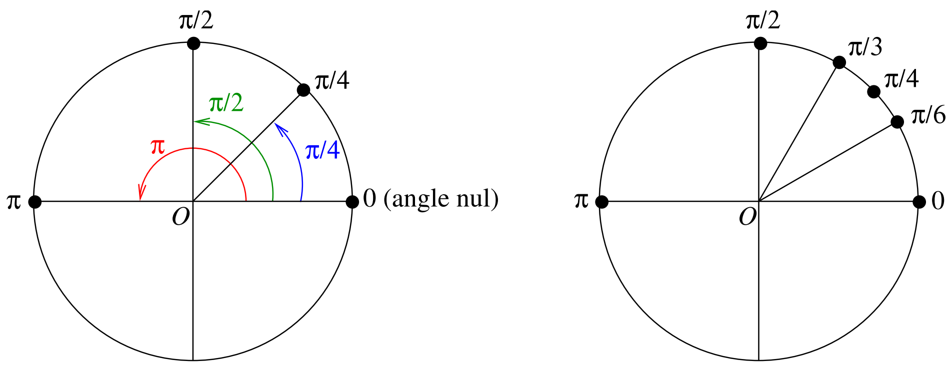


FIGURE 2 – Les principaux angles (en radians) représentés sur le cercle trigonométrique.

Enroulement de la droite réelle sur le cercle trigonométrique
On représente $\mathbb{R}$ verticalement avec le zéro au point I. À chaque réel positif α, on associe un point M_α sur le cercle trigonométrique, obtenu en enroulant sur le cercle un segment de longueur α, en partant du point I et en tournant dans le sens trigonométrique. À chaque réel négatif α, on associe de même un point M_α en enroulant sur le cercle trigonométrique un segment de longueur $|\alpha|$, en partant du point I et en tournant dans le sens inverse du sens trigonométrique. Voir la figure 3.

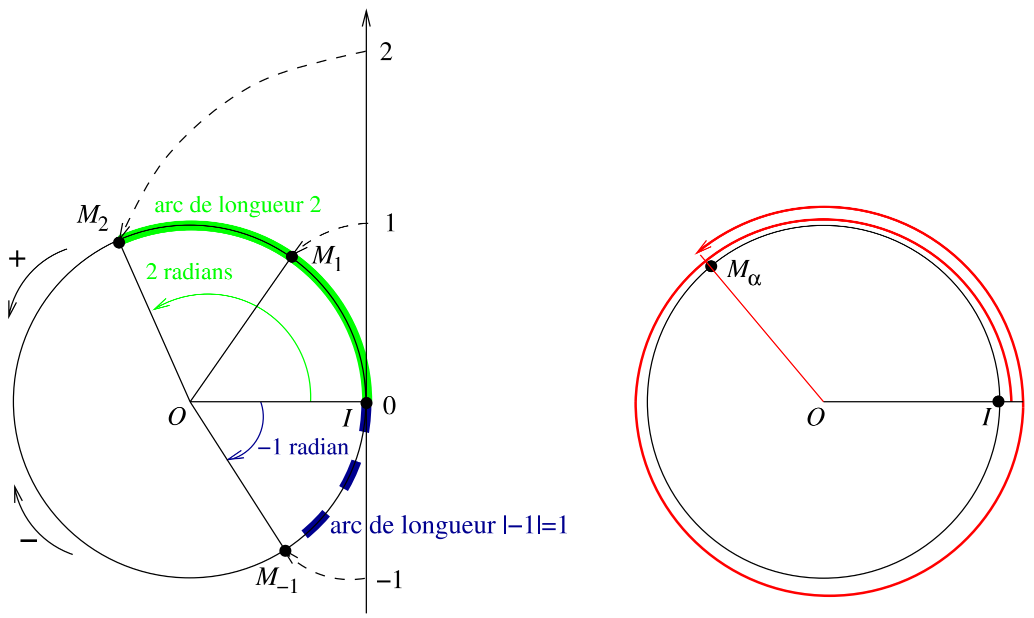


FIGURE 3 – Enroulement de la droite réelle sur le cercle trigonométrique. À gauche : représentation des points M_α pour $\alpha = 1, 2, -1$. À droite : représentation de M_α avec $\alpha > 2\pi$ (l'arc de cercle de longueur α fait plus d'un tour de cercle).

Définition 3. On dit que des réels α et β sont **congrus modulo** $\boldsymbol{2\pi}$ s'il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\beta = \alpha + k \times 2\pi$ (autrement dit, $\beta - \alpha$ est un multiple de 2π). On note $\boldsymbol{\alpha \equiv \beta\ [2\pi]}$.
Plus généralement, on peut définir la congruence de deux réels x, y modulo T, avec $T > 0$:
$x \equiv y\ [T]$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y = x + kT$.

Propriété 4. Cette relation est symétrique : $x \equiv y\ [T] \iff y \equiv x\ [T]$.

Propriété 5. Soit α, β des réels. Si $\beta \equiv \alpha\ [2\pi]$, alors α et β sont représentés par le même point sur le cercle trigonométrique, c'est-à-dire $M_\alpha = M_\beta$. Réciproquement, si $M_\alpha = M_\beta$, alors $\beta \equiv \alpha\ [2\pi]$.

3 Cosinus et sinus sur le cercle trigonométrique

3.1 Définitions

On repère la position d'un point M par ses coordonnées (x, y) : x est l'abscisse de M (c'est-à-dire sa coordonnée sur l'axe horizontal) et y est l'ordonnée de M (c'est-à-dire sa coordonnée sur l'axe vertical).

Définition 6. Soit α un réel. On place le point M_α sur le cercle trigonométrique.
- $\cos(\alpha)$ est l'abscisse du point M_α, c'est-à-dire sa coordonnée sur l'axe horizontal (voir la figure 4).
- $\sin(\alpha)$ est l'ordonnée du point M_α, c'est-à-dire sa coordonnée sur l'axe vertical (voir la figure 4).
- $\tan(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ si $\cos(\alpha) \neq 0$ ($\tan(\alpha)$ n'est pas définie si $\cos(\alpha) = 0$).

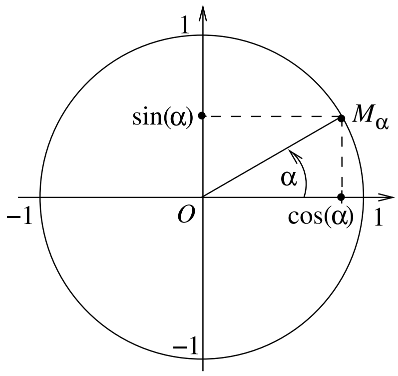


FIGURE 4 – Définition géométrique de $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$, qui sont les coordonnées de M_α

Propriété 7. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\cos(\alpha) \in [-1, 1]$ et $\sin(\alpha) \in [-1, 1]$.

Propriété 8. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout entier $k \in \mathbb{Z}$, $\cos(\alpha + k \times 2\pi) = \cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha + k \times 2\pi) = \sin(\alpha)$. On dit que les fonctions $\alpha \mapsto \cos(\alpha)$ et $\alpha \mapsto \sin(\alpha)$ sont périodiques de période 2π.

Tableau des valeurs remarquables :

α (radians)	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π
$\cos(\alpha)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1
$\sin(\alpha)$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0

3.2 Symétries sur le cercle trigonométrique

Les symétries sur le cercle trigonométrique permettent de retrouver des relations pour le cosinus et le sinus. Voir la figure 5.

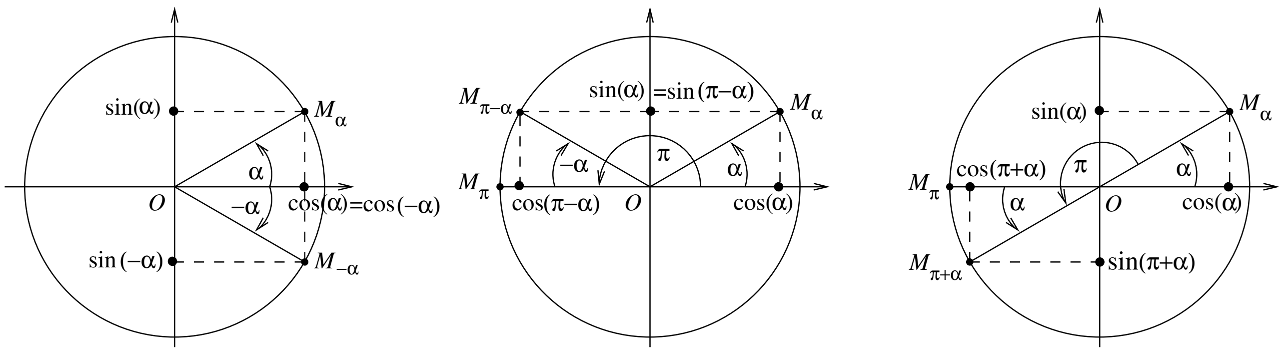


FIGURE 5 – De gauche à droite : la symétrie par rapport à l'axe horizontal, la symétrie par rapport à l'axe vertical et la symétrie centrale par rapport à O.

La symétrie par rapport à l'axe horizontal transforme M_α en $M_{-\alpha}$. On voit que ces deux points ont la même abscisse et que leurs ordonnées sont opposées, ce qui donne la propriété suivante.

Propriété 9. $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ et $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$.

La symétrie par rapport à l'axe vertical transforme M_α en $M_{\pi-\alpha}$. On voit que ces deux points ont la même ordonnée et que leurs abscisses sont opposées, ce qui donne la propriété suivante.

Propriété 10. $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$ et $\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$.

La symétrie centrale par rapport à l'origine O transforme M_α en $M_{\pi+\alpha}$. On voit que ces deux points ont 4des abscisses opposées et des ordonnées opposées, ce qui donne la propriété suivante.

Propriété 11. $\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha)$ et $\sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha)$.

4 Équations trigonométriques

4.1 Résolution de $\cos(\alpha) = c$ ou $\sin(\alpha) = c$, avec c donné, α inconnu

Étape 1 :
Dessiner les points donnant les solutions sur le cercle trigonométrique et identifier un angle correspondant à chaque point (c'est-à-dire, pour chaque point, trouver un réel α tel que le point soit égal à M_α). Si $c \in]-1, 1[$, il y a 2 points correspondant aux solutions (voir la figure 6). Si si $c = 1$ ou $c = -1$, il il y a un seul point. Si $c \notin [-1, 1]$, il n'y a pas de solution.

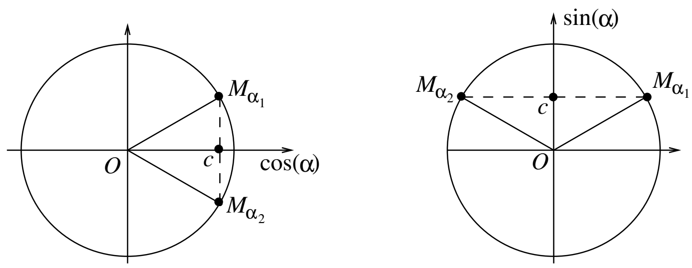


FIGURE 6 – À gauche : les 2 points solutions de $\cos(\alpha) = c$. À droite : les 2 points solutions de $\sin(\alpha) = c$.

Étape 2 :
Si M_{α_1} et M_{α_2} sont les 2 points trouvés à l'étape 1, l'ensemble des solutions **dans $\mathbb{R}$** est l'ensemble des $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$\alpha \equiv \alpha_1 \ [2\pi] \text{ ou } \alpha \equiv \alpha_2 \ [2\pi]$$

autrement dit, l'ensemble des $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquels il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha = \alpha_1 + k \times 2\pi$ ou $\alpha = \alpha_2 + k \times 2\pi$.

De même, s'il n'y a qu'un seul point M_{α_0} à l'étape 1, $\alpha \in \mathbb{R}$ est solution si et seulement si $\alpha \equiv \alpha_0 \ [2\pi]$.

Remarques.

• *Chercher les solutions dans $\mathbb{R}$ revient à chercher les solutions sur la droite réelle* **<u>non enroulée</u>**. *On commence par chercher les solutions sur le cercle (c'est-à-dire la droite réelle enroulée) à l'étape 1, puis on "déroule" la droite réelle pour trouver toutes les solutions à l'étape 2.*

• *Il y a toujours une infinité de solutions dans $\mathbb{R}$ dès que $c \in [-1, 1]$.*

• *Si on se restreint aux solutions dans $[0, 2\pi[$ ou dans $]-\pi, \pi]$, alors chaque point du cercle trigonométrique trouvé à l'étape 1 correspond à une unique solution. Si un angle trouvé à l'étape 1 n'est pas dans l'intervalle cherché, il faut trouver un autre réel dans l'intervalle et donnant le même point.*

4.2 Résolution de $\cos(n\alpha) = c$ ou $\sin(n\alpha) = c$, avec n et c donnés, α inconnu

On pose $\alpha' = n\alpha$, et on résout l'équation $\cos(\alpha') = c$ ou $\sin(\alpha') = c$ comme dans le paragraphe 4.1.
Une fois qu'on a toutes les solutions $\alpha' \in \mathbb{R}$, on en déduit les solutions $\alpha \in \mathbb{R}$ car $\alpha = \frac{1}{n}\alpha'$.

5 Formules trigonométriques

La notation $\cos^2(a)$ signifie $(\cos(a))^2$. De même, $\sin^2(a) = (\sin(a))^2$.
On a les formules suivantes pour tous réels a, b.

$$\boxed{\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1}$$
$$\boxed{\cos(a + b) = \cos(a) \cdot \cos(b) - \sin(a) \cdot \sin(b)}$$
$$\boxed{\sin(a + b) = \sin(a) \cdot \cos(b) + \cos(a) \cdot \sin(b)}$$

Ces trois formules permettent de retrouver les formules suivantes.

$$\cos(a - b) = \cos(a) \cdot \cos(b) + \sin(a) \cdot \sin(b)$$
$$\sin(a - b) = \sin(a) \cdot \cos(b) - \cos(a) \cdot \sin(b)$$
$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$$
$$\sin(2a) = 2\sin(a) \cdot \cos(a)$$

II. Points et vecteurs du plan

1 Définition

Définition 1. Un **vecteur** représente un déplacement. Un vecteur $\vec{u}$ est défini par sa **direction**, son **sens** et sa **longueur**. Si A et B sont 2 points distincts, le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ est le vecteur tel que :
- sa direction est la droite (AB),
- son sens est de A vers B,
- sa longueur est la longueur AB.

Représentation graphique d'un vecteur. On représente le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ par une flèche allant de A vers B. On peut dessiner $\vec{u}$ avec un point d'origine quelconque.

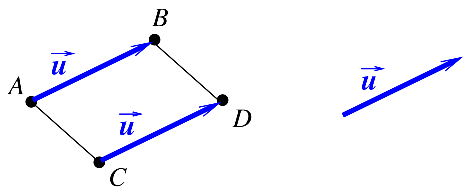


FIGURE 7 – Représentation du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. De plus, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ et $ABDC$ est un parallélogramme.

Propriété 2. Soit A, B, C, D 4 points du plan. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux ($\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$) si
- les droites (AB) et (CD) sont parallèles (éventuellement confondues),
- les longueurs AB et CD sont égales,
- la flèche allant de A vers B et la flèche allant de C vers D sont dans le même sens.

Cas particulier : pour tout point A, le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est le vecteur nul, noté $\vec{0}$. Il n'a ni direction ni sens, sa longueur est nulle.

Définition 3. La **translation** de vecteur $\vec{u}$ est la transformation qui envoie un point M sur un point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$. Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, la translation de vecteur $\vec{u}$ envoie A sur B et envoie M sur le point M' tel que $ABM'M$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).

Interprétation graphique d'une translation. La translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un "glissement" de tous les points du plan :
- dans la direction de la droite (AB),
- dans le sens de A vers B,
- de longueur AB.

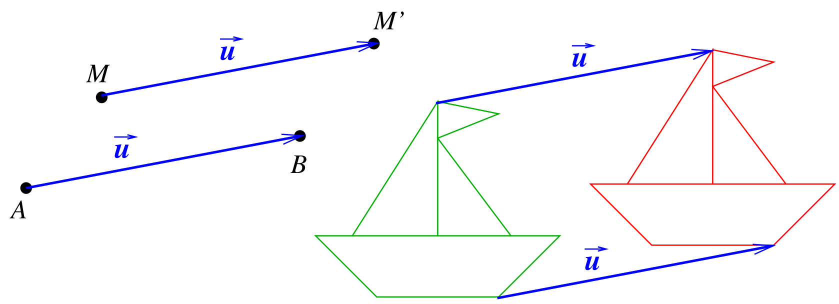


FIGURE 8 – La translation de vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ envoie le point A sur le point B, le point M sur le point M' et la figure du milieu sur la figure de droite.

Propriété 4. Soit A, B, C, D 4 points formant un quadrilatère (c'est-à-dire qu'ils ne sont pas alignés).

$$\begin{aligned} ABCD \text{ est un parallélogramme} &\iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \\ &\iff \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \end{aligned}$$

2 Coordonnées dans un repère

Un **repère** du plan est donné par 3 points non alignés (O, I, J), dans l'ordre.

— Le point O est l'origine.

— La droite (OI) est l'axe des abscisses, orienté par le vecteur $\overrightarrow{OI}$. L'axe représente $\mathbb{R}$ avec zéro à l'origine et 1 au point I.

— La droite (OJ) est l'axe des ordonnées, orienté par le vecteur $\overrightarrow{OJ}$. L'axe représente $\mathbb{R}$ avec zéro à l'origine et 1 au point J.

De façon équivalente, le repère peut être donné par $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$.
Le repère est **orthonormé** si les deux axes sont perpendiculaires et si les longueurs OI et OJ valent 1 (pour une certaine unité).

Sauf indication contraire, tout ce qui suit est valable pour les coordonnées dans un repère quelconque. Néanmoins, pour simplifier, on peut se contenter de considérer un repère orthonormé avec l'axe des abscisses horizontal orienté vers la droite et l'axe des ordonnées vertical orienté vers le haut (repère canonique), qui est la situation standard. Les figures sont dessinées dans ce repère. Nous définirons précisément les coordonnées dans un repère quelconque en section 6 de ce chapitre.

Coordonnées d'un point dans un repère. Un point A est repéré dans par ses coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Dans le repère canonique, x est le déplacement sur l'axe horizontal entre O et A, et y est le déplacement vertical entre O et A.

Définition-propriété 5. Soit A, B, C, D quatre points de coordonnées $\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_D \\ y_D \end{pmatrix}$ dans un repère fixé.

- Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.
- De plus, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ si et seulement si $\begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$. Autrement dit, un vecteur $\vec{u}$ est entièrement déterminé par ses coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, indépendamment des points.

Notation. Pour indiquer de façon résumée que le point A a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on note $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. De même, pour indiquer que le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on note $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Cas particulier. Le vecteur nul $\vec{0}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

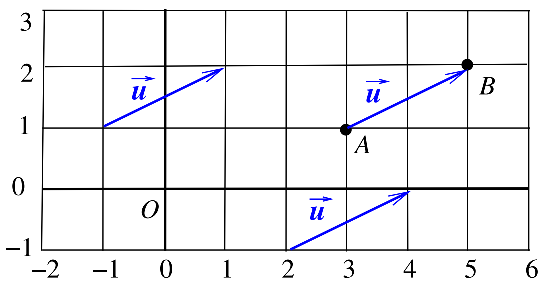


FIGURE 9 – Représentation des points $A\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, et du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3 Opérations

Définition 6. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. On choisit un point A quelconque, puis on définit le point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et le point C tel que $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$. Alors la somme de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, notée $\vec{u}+\vec{v}$, est le vecteur $\overrightarrow{AC}$. De façon équivalente, $\vec{u}+\vec{v}$, est le vecteur associé à la translation correspondant à l'enchaînement de la translation de vecteur $\vec{u}$ et de la translation de vecteur $\vec{v}$.

Propriété 7. Si on se place dans un repère avec $\vec{u}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $\vec{u}+\vec{v}$ est le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix}$. On écrit aussi $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix}$.

Propriété 8 (relation de Chasles)**.** Si A, B, C sont trois points, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Représentation graphique de la somme $\vec{u}+\vec{v}$. On dessine le vecteur $\vec{u}$ en partant d'un point quelconque, puis on dessine $\vec{v}$ en mettant la flèche $\vec{v}$ au bout de la flèche $\vec{u}$. Voir la figure 10 à gauche.

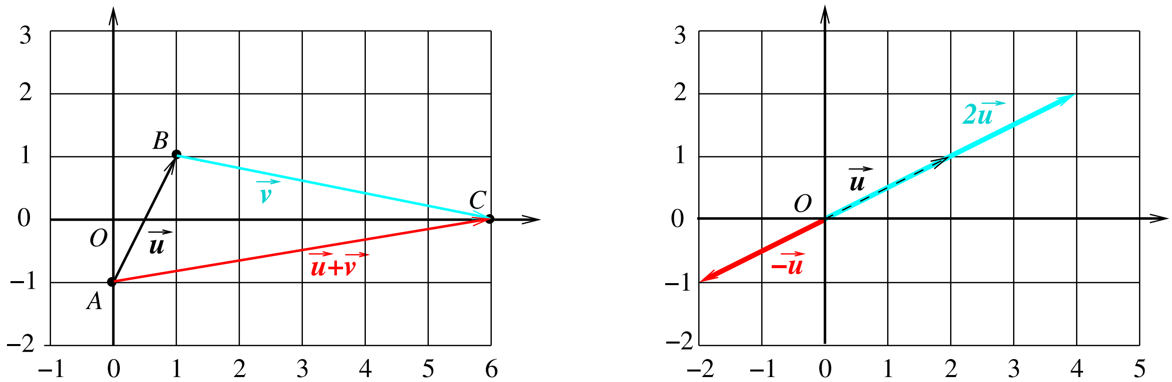


FIGURE 10 – À gauche : représentation graphique des vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ et de la somme $\vec{u}+\vec{v}$. À droite : représentation de la multiplication d'un vecteur par un réel ($\vec{u}$ en pointillé, $2\vec{u}$ et $-\vec{u}$ en traits plus épais), les trois vecteurs partant du point O.

Définition 9. Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan et λ un nombre réel. La multiplication de $\vec{u}$ par λ, noté $\lambda\vec{u}$, est le vecteur :
- de même direction que $\vec{u}$,
- de même sens que $\vec{u}$ si $\lambda > 0$ et de sens opposé à $\vec{u}$ si $\lambda < 0$,
- de longueur $|\lambda|L$ si L est la longueur de $\vec{u}$ (où $|\lambda|$ est la valeur absolue de λ).

Cas particulier : si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\lambda = 0$, $\lambda\vec{u}$ est le vecteur nul.

Propriété 10. Si on se place dans un repère avec $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\lambda\vec{u}$ est le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$. On écrit aussi $\lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$.

Représentation graphique de la multiplication par un réel. Pour dessiner $\lambda\vec{u}$, on multiplie la longueur de la flèche du vecteur $\vec{u}$ par λ : $\lambda\vec{u}$ a la même direction que $\vec{u}$ (donc $\vec{u}$ et $\lambda\vec{u}$ sont sur la même droite si on les dessine en partant du même point), le même sens que $\vec{u}$ si $\lambda > 0$, le sens opposé si $\lambda < 0$. Voir la figure 10 à droite.

Définition 11. Le vecteur **opposé** à $\vec{u}$ est le vecteur $(-1)\vec{u}$, on le note $-\vec{u}$.

Propriété 12. Si $\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $-\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$.

Propriété 13. Soit A, B deux points. Alors $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Notation. $\vec{u} - \vec{v}$ est une notation qui signifie $\vec{u} + (-\vec{v})$.

Propriété 14. Soit $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs et λ un nombre réel.
• $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$,
• $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$,
• $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$,
• $\vec{u} - \vec{u} = \vec{0}$,
• $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$,
• $0\vec{u} = \vec{0}$.

4 Milieu

Propriété 15. Soit A et B deux points de coordonnées $\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$. Si I est le milieu du segment $[AB]$, alors les coordonnées de I sont $\begin{pmatrix} \frac{x_A+x_B}{2} \\ \frac{y_A+y_B}{2} \end{pmatrix}$.

Propriété 16. I est le milieu de $[AB]$ $\begin{aligned} &\iff \overrightarrow{AI} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\ &\iff \overrightarrow{IB} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} \end{aligned}$

5 Vecteurs colinéaires, base, déterminant

Définition 17. On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** s'il existe un nombre réel λ tel que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ ou $\vec{u} = \lambda\vec{v}$.

Propriété 18. Si $\vec{u}$ est différent du vecteur nul, on a l'équivalence suivante :
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\iff$ il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'ils ont la même direction. Autrement dit, si on dessine $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en partant du même point, les deux flèches les représentant sont sur une même droite.

Cas particulier. Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur $\vec{u}$ car $\vec{0} = \lambda\vec{u}$ avec $\lambda = 0$.

Définition 19. On dit que deux vecteurs du plan $\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment une **base** du plan si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. On dit aussi que la famille $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base du plan (l'ordre des vecteurs compte).

Définition 20. On se place dans un repère. On considère deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Le **déterminant** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\det(\vec{u}, \vec{v})$, est défini par $\det(\vec{u}, \vec{v}) = x_1y_2 - x_2y_1$. On écrit aussi $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$.

Remarque. Le déterminant est un produit en croix : on fait le produit sur chaque diagonale, puis on calcule (diagonale $\diagdown$) $-$ (diagonale $\diagup$).

Théorème 21. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. On a les équivalences suivantes :
• $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\iff \det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$,
• $\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment une base du plan $\iff \det(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0$.

6 Coordonnées dans une base

6.1 Définition et existence des coordonnées

Théorème-définition 22. Soit $(\vec{u}, \vec{v})$ une base du plan. Pour tout vecteur $\vec{w}$, il existe des nombres réels x et y tels que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$. De plus, x et y sont uniques.
x et y sont appelés les **coordonnées** de $\vec{w}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.

Définition 23. Les coordonnées d'un point A dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OA}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.

Ceci donne la définition des coordonnées dans un repère quelconque (pas nécessairement orthonormé), qui est illustrée par la figure 11.

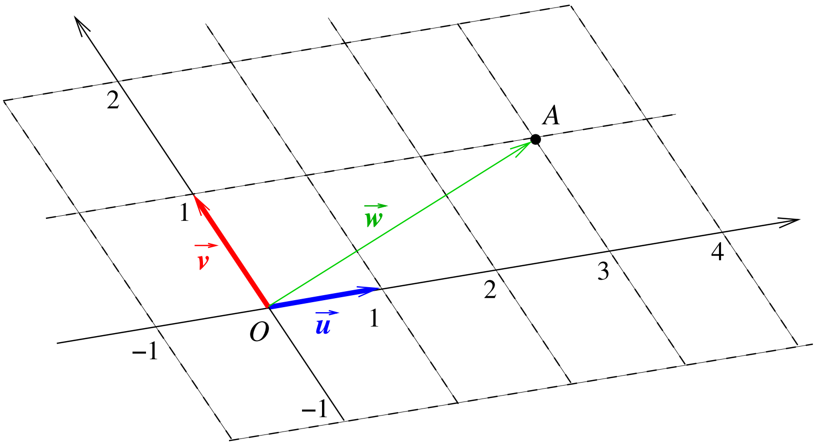


FIGURE 11 – Dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$, le vecteur $\vec{w}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, ce qui signifie que $\vec{w} = 3\vec{u} + 1\vec{v}$.

Dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, le point A a pour coordonnées $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$. Cela revient à repérer le point en utilisant le quadrillage de la figure, les cases étant des parallélogrammes de côtés $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Quand on s'est fixé un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (par exemple le repère canonique), on peut souhaiter exprimer les coordonnées des vecteurs ou des points dans un autre repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (autrement dit, on change les axes des coordonnées en gardant la même origine). Voici une méthode pour trouver les coordonnées dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$ si on connaît les coordonnées dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Méthode pour trouver les coordonnées dans une nouvelle base.

On part d'une base $(\vec{i}, \vec{j})$. Dans la suite, les coordonnées écrites en colonne (telles que $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$) sont les coordonnées dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$. Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$ deux vecteurs formant une base. On calcule $x\vec{u} + y\vec{v}$ avec x, y inconnues, on trouve un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}xa + yc\\xb + yd\end{pmatrix}$. Soit $\vec{w}\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$. Les coordonnées de $\vec{w}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$ sont les nombres x, y tels que $x\vec{u} + y\vec{v} = \vec{w}$, autrement dit $\begin{pmatrix}xa + yc\\xb + yd\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$.

Pour trouver x et y, il faut résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcl} ax + cy & = & A \\ bx + dy & = & B \end{array}\right.$

*Remarque. Quand on s'est fixé au début un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et qu'on parle de coordonnées d'un vecteur sans préciser la base, il s'agit des coordonnées dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$. La notation $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ est réservée aux coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ dans la **base $(\vec{i}, \vec{j})$**, il ne faut pas l'utiliser pour une autre base (sinon on ne sait plus de quelle base on parle).*

6.2 Systèmes de 2 équations à 2 inconnues

On veut résoudre un système de la forme $\left\{\begin{array}{rcll} ax + cy & = & A & (L1) \\ bx + dy & = & B & (L2) \end{array}\right.$
où x, y sont les inconnues et a, b, c, d, A, B sont des réels connus.
On numérote les lignes comme ci-dessus pour pouvoir indiquer les opérations qu'on effectue.

On va présenter deux méthodes de résolution, qu'on va illustrer par le même système

$$(S) : \quad \left\{\begin{array}{rcrcrl} x & + & y & = & 1 & (L1) \\ 3x & + & y & = & 2 & (L2) \end{array}\right.$$

a) Méthode de résolution par substitution
À l'aide de la ligne $(L1)$, on exprime x en fonction de y. Puis on remplace dans $(L2)$ x par la valeur trouvée, de sorte qu'on n'a plus de x dans cette ligne, ce qui permet de trouver y. Une fois y trouvé, on utilise l'expression de x en fonction de y pour trouver x.

Exemple 24.
Dans le système (S) ci-dessus, $(L1)$ donne $\boxed{x = 1 - y}$. On remplace x par $1-y$ dans $(L2)$, ce qui donne : $3(1 - y) + y = 2 \Longleftrightarrow 3 - 3y + y = 2 \Longleftrightarrow 3 - 2y = 2 \Longleftrightarrow -2y = 2 - 3 = -1 \Longleftrightarrow y = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$.
Pour trouver x, on utilise $x = 1 - y$ (encadré ci-dessus) : $x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.
La solution du système est $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$.

Dans la méthode de résolution par substitution, on peut aussi exprimer x en fonction de y à partir de $(L2)$, puis remplacer dans $(L1)$. Inversement, on peut exprimer y en fonction de x.

b) Méthode de résolution par combinaison
Une **combinaison** de lignes $a(L1) + b(L2)$ consiste à :
– multiplier le membre de gauche et le membre de droite de $(L1)$ par a,
– multiplier le membre de gauche et le membre de droite de $(L2)$ par b,
– additionner les membres de gauche entre eux et les membres de droite entre eux.

Dans le système (S) ci-dessus, la combinaison $5(L1) + 4(L2)$ donne :

$$5 \times (x + y) + 4 \times (3x + y) = 5 \times 1 + 4 \times 2,$$

ce qui donne, après calcul, la nouvelle équation $17x + 9y = 13$.

Dans la méthode de résolution par combinaison, on garde la ligne $(L1)$ sans la changer. On remplace la ligne $(L2)$ par une combinaison $(L2) + a(L1)$, où a est une constante. On choisit a pour que cette combinaison donne un coefficient 0 devant x. On peut aussi remplacer la ligne $(L2)$ par une combinaison $b(L2) + a(L1)$ avec $b \neq 0$.
Ceci donne une nouvelle ligne $(L2')$ qui ne contient plus x, ce qui permet de trouver y. Une fois qu'on a trouvé y, on remplace y par sa valeur dans la ligne $(L1)$, ce qui permet de trouver x.

Exemple 25. On reprend le système (S), qu'on peut écrire ainsi (pour faire apparaître les coefficients) :

$$\left\{\begin{array}{ccccll} 1x & + & 1y & = & 1 & (L1) \\ 3x & + & 1y & = & 2 & (L2) \end{array}\right.$$

On fait la combinaison $(L2) - 3(L1)$, ce qui donne le coefficient $3 - 3 \times 1 = 0$ devant x, le coefficient $1 - 3 \times 1 = -2$ devant y, et le terme $2 - 3 \times 1 = -1$ à droite.

$$\left\{\begin{array}{ccccll} x & + & y & = & 1 & (L1) \\ & & -2y & = & -1 & (L2') = (L2) - 3(L1) \end{array}\right.$$

À partir de la ligne $(L2')$, on trouve $y = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$. Puis on remplace dans la ligne $(L1)$, qui devient :
$x + \frac{1}{2} = 1 \Longleftrightarrow x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. La solution du système est $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$.

Remarque. Quand on résout un système, on peut aussi échanger $(L1)$ et $(L2)$, ou multiplier une ligne par une constante non nulle (par exemple, multiplier $3x + 3y = 6$ par $\frac{1}{3}$ pour simplifier les coefficients).

7 Norme, produit scalaire, orthogonalité, base orthonormée

Dans toute la section 7, on se place dans un **repère orthonormé** (voir la définition section 2 page 7).

7.1 Norme d'un vecteur, distance

Définition 26. La **norme** du vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, notée $\|\vec{u}\|$, est définie par $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Propriété 27.
- Soit $\vec{u}$ un vecteur. Alors $\|\vec{u}\|$ est la longueur du vecteur $\vec{u}$ (en particulier, c'est un réel positif).
- Soit A, B deux points. La distance entre A et B, notée AB, est égale à $\|\overrightarrow{AB}\|$.

Propriété 28. Soit $\vec{u}$ un vecteur et λ un nombre réel. On a :
$\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda|.\|\vec{u}\|$ (où $|\lambda|$ est la valeur absolue de λ).

7.2 Produit scalaire de deux vecteurs, vecteurs orthogonaux

Définition 29. Le **produit scalaire** de deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$, noté $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle$, est le nombre réel défini par $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle = x_1x_2 + y_1y_2$.

Propriété 30.
- $\langle\vec{u},\vec{u}\rangle = \|\vec{u}\|^2$.
- $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle = \langle\vec{v},\vec{u}\rangle$.
- $\langle\vec{u}_1+\vec{u}_2,\vec{v}\rangle = \langle\vec{u}_1,\vec{v}\rangle + \langle\vec{u}_2,\vec{v}\rangle$ et $\langle\vec{u},\vec{v}_1+\vec{v}_2\rangle = \langle\vec{u},\vec{v}_1\rangle + \langle\vec{u},\vec{v}_2\rangle$.
- $\langle\lambda\vec{u},\vec{v}\rangle = \lambda\langle\vec{u},\vec{v}\rangle$ et $\langle\vec{u},\lambda\vec{v}\rangle = \lambda\langle\vec{u},\vec{v}\rangle$ (où λ est un nombre réel).

Définition 31. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs différents du vecteur nul. Soit A, B, C des points tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ (de sorte que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont représentés avec le même point de départ). L'**angle** entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est l'angle entre les segments $[AB]$ et $[AC]$. Selon les cas, on considère l'angle non orienté $\widehat{BAC}$ ou l'angle orienté allant de $[AB]$ vers $[AC]$ (voir les figures 12 et 13, avec $A = O$).

Définition 32. Si l'angle entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est un angle droit, on dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux. On note $\vec{u}\perp\vec{v}$. Par convention, on dit que le vecteur nul $\vec{0}$ est orthogonal à tout vecteur $\vec{u}$.

Théorème 33. Deux vecteurs $\vec{u}$ et et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle = 0$.

Exemple important. Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$. Alors le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}$ est orthogonal à $\vec{u}$.
L'ensemble des vecteurs orthogonaux à $\vec{u}$ est l'ensemble des vecteurs colinéaires à $\vec{v}$.

7.3 Interprétation graphique du produit scalaire et du déterminant

Propriété 34. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs différents du vecteur nul. Soit α l'angle (orienté ou non) entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Alors $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos(\alpha)$.

Propriété 35. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs différents du vecteur nul. Soit B, C les points tels que $\overrightarrow{OB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OC} = \vec{v}$. Soit D la projection orthogonale de C sur la droite (OB) et $\vec{w} = \overrightarrow{OD}$. Alors $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle = \|\vec{u}\|.\|\vec{w}\|$ si $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont dans le même sens (autrement dit si l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est aigu), et $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle = -\|\vec{u}\|.\|\vec{w}\|$ si $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont en sens opposé (autrement dit si l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est obtus).

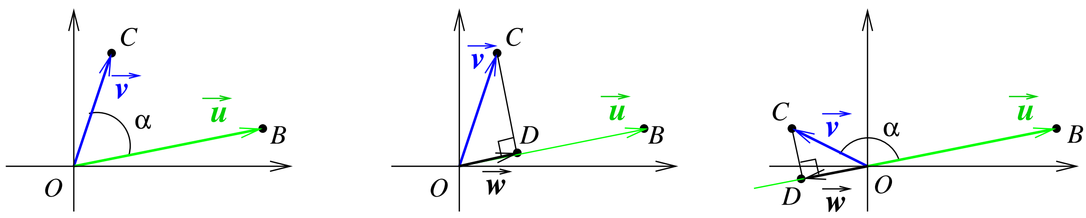


FIGURE 12 – Illustration des propriétés 34 et 35. À gauche : angle non orienté entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Au milieu : $\vec{w}$ est la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur (OB) avec $\vec{u}$ et $\vec{w}$ de même sens (angle aigu entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$). À droite : $\vec{w}$ est la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur (OB) avec $\vec{u}$ et $\vec{w}$ de sens opposé (angle obtus entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$).

Les deux propriétés suivantes sont valables dans le repère canonique (axe des abscisses orienté vers la droite, axe des ordonnées orienté vers le haut) ou plus généralement dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ dans lequel on tourne dans le sens trigonométrique pour aller de $\vec{i}$ vers $\vec{j}$.

Propriété 36. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs différents du vecteur nul. Soit α l'angle orienté allant de $\vec{u}$ vers $\vec{v}$. Alors $\det(\vec{u},\vec{v}) = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\sin(\alpha)$.

Propriété 37. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs différents du vecteur nul et α l'angle orienté allant de $\vec{u}$ vers $\vec{v}$. Soit B, C les points tels que $\overrightarrow{OB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OC} = \vec{v}$, et D le point tel que $OBDC$ est un parallélogramme. Soit $\mathcal{A}$ l'aire du parallélogramme $OBDC$. Alors $\det(\vec{u},\vec{v}) = \mathcal{A}$ si $\sin(\alpha) \geq 0$ et $\det(\vec{u},\vec{v}) = -\mathcal{A}$ si $\sin(\alpha) < 0$.

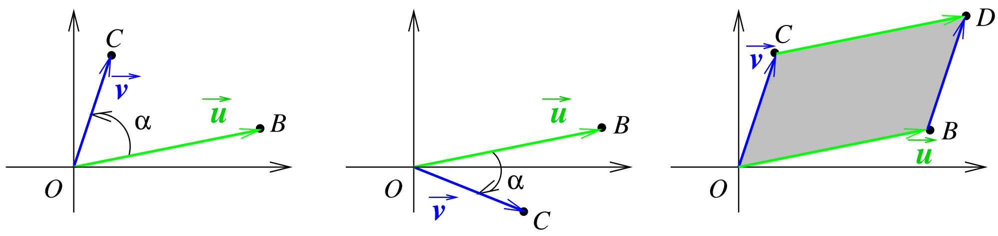


FIGURE 13 – Illustration des propriétés 36 et 37. À gauche : angle orienté entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ avec $\sin(\alpha) > 0$. Au milieu : angle orienté entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ avec $\sin(\alpha) < 0$. À droite : aire du parallélogramme déterminé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

7.4 Base orthonormée

On se place dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Définition 38. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. On dit que $(\vec{u},\vec{v})$ est une **base orthonormée** si :
- $(\vec{u},\vec{v})$ est une base du plan,
- $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle = 0$,
- $\|\vec{u}\| = 1$ et $\|\vec{v}\| = 1$.

(le produit scalaire et les normes sont calculés avec les coordonnées dans la base $(\vec{i},\vec{j})$)

Remarque. La base $(\vec{i},\vec{j})$ est une base orthonormée.

Pour construire une base orthonormée différente de la base de départ :
- on part d'un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ différent de $\vec{0}$;
- on construit un vecteur $\vec{v}$ orthogonal à $\vec{u}$ (avec $\vec{v} \neq \vec{0}$), par exemple $\vec{v}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$;
- on définit $\vec{u}' = \frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$ et $\vec{v}' = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$. On peut vérifier que $(\vec{u}',\vec{v}')$ est une base orthonormée.

III. Droites du plan

Dans tout ce chapitre, on se place dans un repère orthonormé du plan.

1 Équation cartésienne d'une droite

Définition 1. Soit A un point du plan et $\vec{u}$ un vecteur différent de $\vec{0}$. La droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

Propriété 2. Soit A, B deux points avec $A \neq B$. La droite (AB) est la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$.

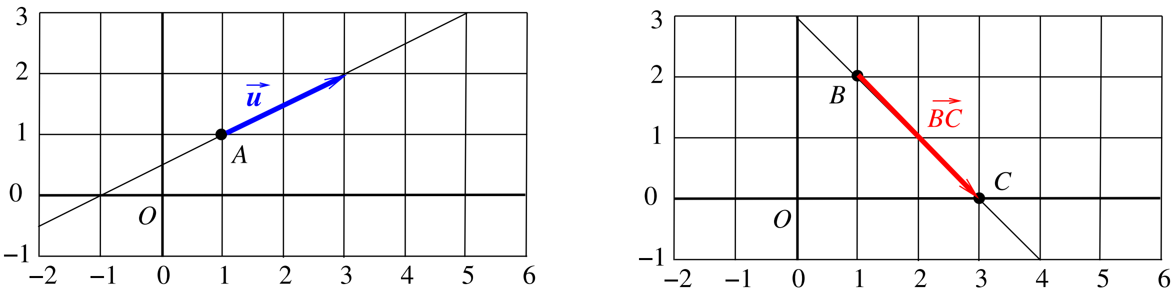


Figure 14 – À gauche : droite passant par le point $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$: on dessine le vecteur $\vec{u}$ avec A comme point de départ de la flèche de $\vec{u}$; la droite est obtenue en prolongeant la flèche. À droite : la droite (BC) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{BC}$.

Définition 3. Une **équation cartésienne** de la droite $\mathcal{D}$ est une équation de la forme $ax + by + c = 0$, où a, b, c sont des réels fixés. Cette équation décrit la droite $\mathcal{D}$ dans le sens où un point M de coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ appartient à la droite si et seulement si x, y vérifient $ax + by + c = 0$.

Méthode pour trouver l'équation cartésienne d'une droite. Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$. On considère un point M de coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, avec x, y non fixés. Le point M appartient à $\mathcal{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires $\iff \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0$. Le calcul de ce déterminant permet de trouver une équation cartésienne de $\mathcal{D}$, comme illustré dans l'exemple suivant.

Exemple 4. On considère le point $A\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ et le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$. Soit $\mathcal{D}_0$ la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$. Si M a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, le vecteur $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x-4\\y-1\end{pmatrix}$.
$\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = \begin{vmatrix} x-4 & 2 \\ y-1 & 3 \end{vmatrix} = (x-4) \times 3 - 2 \times (y-1) = 3x - 12 - 2y + 2 = 3x - 2y - 10$. Donc $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0 \iff 3x - 2y - 10 = 0$. Conclusion : $3x - 2y - 10 = 0$ est une équation cartésienne de $\mathcal{D}_0$.

Pour trouver l'équation cartésienne de la droite (AB), on utilise la même méthode en utilisant le fait que cette droite est la droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ (propriété 2).

Propriété 5.
- Toute droite a une équation cartésienne.
- Toute équation $ax + by + c = 0$ est une équation cartésienne d'une droite à condition que a et b ne soient pas nuls tous les deux.

Remarque. Une droite a toujours une infinité d'équations cartésiennes : il suffit de multiplier une équation par une constante non nulle pour trouver une autre équation cartésienne de la même droite.

2 Équation réduite d'une droite

Définition 6. Une équation réduite (ou équation cartésienne réduite) d'une droite $\mathcal{D}$ est une équation de la forme $y = px + k$.
p est appelé la **pente** (ou le **coefficient directeur**) de $\mathcal{D}$ et k est appelé l'**ordonnée à l'origine**.

Remarque. Une équation réduite est le graphe d'une fonction affine.

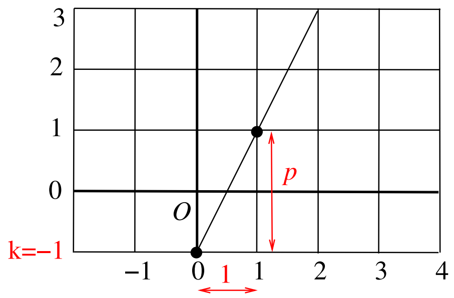


FIGURE 15 – Droite d'équation réduite $y = 2x - 1$. L'ordonnée à l'origine est $k = -1$, donc la droite passe par le point de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. La pente est $p = 2$, ce qui signifie qu'un déplacement horizontal de 1 donne un déplacement vertical de p.

Propriété 7. Si $\mathcal{D}$ est une droite qui n'est pas verticale, alors $\mathcal{D}$ a une équation réduite, et cette équation est unique.

Pour passer d'une équation cartésienne $ax + by + c = 0$ à une équation réduite, on isole y d'un côté et on divise par b (si $b \neq 0$).

Exemple 8. Suite de l'exemple 4. On a vu que $3x - 2y - 10 = 0$ est une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}_0$ passant par le point $A \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
$3x - 2y - 10 = 0 \iff 3x - 10 = 2y \iff \frac{3}{2}x - 5 = y$.
Conclusion : $y = \frac{3}{2}x - 5$ est l'équation réduite de la droite $\mathcal{D}_0$. La pente de $\mathcal{D}_0$ vaut $\frac{3}{2}$.

Cas particuliers. On considère une droite $\mathcal{D}$ d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$.
• Si $a = 0$ et $b \neq 0$, l'équation devient $by + c = 0 \iff y = -\frac{c}{b}$ (ce qui peut s'écrire $y = k$ avec $k = -\frac{c}{b}$). La droite $\mathcal{D}$ est horizontale, sa pente est nulle. Une droite horizontale admet toujours une équation de la forme $y = k$ (voir la figure 16).
• Si $b = 0$ et $a \neq 0$, l'équation devient $ax + c = 0 \iff x = -\frac{c}{a}$ (ce qui peut s'écrire $x = d$ avec $d = -\frac{c}{a}$). La droite $\mathcal{D}$ est verticale. Dans ce cas, $\mathcal{D}$ n'a pas d'équation réduite. Par convention, on dit que la pente de $\mathcal{D}$ est infinie. Une droite verticale admet toujours une équation de la forme $x = d$ (voir la figure 16).
• Si $c = 0$, la droite $\mathcal{D}$ passe par l'origine. En effet, le point $O \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ vérifie l'équation $ax + by = 0$.

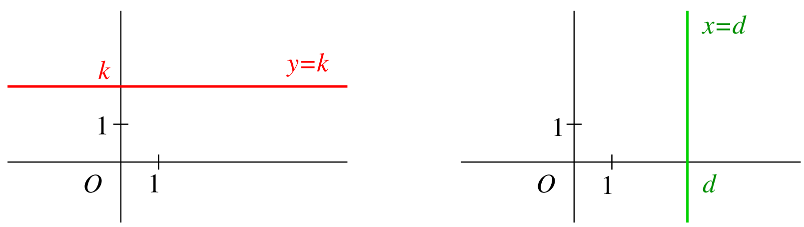


FIGURE 16 – À gauche : droite horizontale ; elle a une équation réduite de la forme $y = k$, sa pente est $p = 0$. À droite : droite verticale ; elle a une équation cartésienne de la forme $x = d$; elle n'a pas d'équation réduite, sa pente est infinie.

3 Intersection de droites

Deux droites non parallèles se coupent en un unique point. Si on a une équation cartésienne de chacune des deux droites, le point d'intersection est le point dont les coordonnées vérifient les deux équations.

Exemple 9. Soit $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ les droites d'équations cartésiennes $x - 3y - 4 = 0$ et $x - 2y - 1 = 0$. Soit I le point d'intersection de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$. Si les coordonnées de I sont $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors x, y vérifient :

$$\begin{cases} x - 3y - 4 &= 0 \quad (L1) \\ x - 2y - 1 &= 0 \quad (L2) \end{cases}$$

Il faut résoudre ce système d'équations. À partir de $(L1)$, on peut écrire $x = 3y + 4$. On remplace dans $(L2)$, qui devient : $(3y + 4) - 2y - 1 = 0 \iff y + 3 = 0 \iff y = -3$. On en déduit que $x = 3y + 4 = 3 \times (-3) + 4 = -5$. Donc le point d'intersection I a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix}$.

4 Liens entre équation cartésienne, vecteur directeur, pente, parallélisme

Propriété 10. Soit A, B, C, D 4 points avec $A \neq B$ et $C \neq D$. Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires (ce qui est équivalent à $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0$).

On a vu à la section 1 comment trouver une équation cartésienne d'une droite passant par un point et de vecteur directeur $\vec{u}$. On peut voir qu'avec cette méthode les coordonnées de $\vec{u}$ apparaissent dans l'équation cartésienne trouvée (voir l'exemple 4), ce qui donne le résultat suivant.

Propriété 11 (lien entre équation cartésienne et vecteur directeur)**.**
• Soit $\mathcal{D}$ une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$. Alors il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ tel que $ax + by + c = 0$ est une équation cartésienne de $\mathcal{D}$ avec $\boldsymbol{a = y_{\vec{u}}}$ et $\boldsymbol{b = -x_{\vec{u}}}$.
• Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$. Alors le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} \boldsymbol{-b} \\ \boldsymbol{a} \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

Corollaire 12 (lien entre équation cartésienne et parallélisme)**.**
Soit $\mathcal{D}_1$ la droite d'équation cartésienne $ax + by + c_1 = 0$.
• Si $\mathcal{D}_2$ est la droite d'équation cartésienne $ax + by + c_2 = 0$, alors les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont parallèles.
• Si $\mathcal{D}_2$ est une droite parallèle à $\mathcal{D}_1$, alors il existe une constante $c_2 \in \mathbb{R}$ telle que $ax + by + c_2 = 0$ soit une équation cartésienne de $\mathcal{D}_2$.

Remarque. Dans le corollaire précédent, le premier point n'est pas une équivalence car une droite n'a pas une unique équation cartésienne. Par exemple, les droites d'équations $x + y + 1 = 0$ et $2x + 2y + 3 = 0$ sont parallèles bien que leurs équations ne commencent pas par les mêmes termes.

Exemple 13. Soit $\mathcal{D}_0$ la droite d'équation cartésienne $3x - 2y - 10 = 0$ (droite de l'exemple 4). On cherche la droite $\mathcal{D}$ parallèle à $\mathcal{D}_0$ passant par le point B de coordonnées $\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$.
Par le corollaire 12, on sait qu'il existe une constante c telle que $3x - 2y + c = 0$ soit une équation cartésienne de $\mathcal{D}$. Comme le point B appartient à $\mathcal{D}$, il faut que ses coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ vérifient l'équation, c'est-à-dire $3 \times 4 - 2 \times (-5) + c = 0 \iff 12 + 10 + c = 0 \iff 22 + c = 0 \iff c = -22$.

Conclusion : $3x - 2y - 22 = 0$ est une équation cartésienne de $\mathcal{D}$.

Propriété 14 (lien entre pente et vecteur directeur)**.**

• Soit $\mathcal{D}$ une droite de pente p. Alors le vecteur $\vec{v}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ p \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

• Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$. On note $\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$ les coordonnées de $\vec{u}$. Si $x_{\vec{u}} \neq 0$, alors la pente de $\mathcal{D}$ est $p = \frac{y_{\vec{u}}}{x_{\vec{u}}}$. Si $x_{\vec{u}} = 0$, la droite $\mathcal{D}$ est verticale et a une pente infinie.

Corollaire 15. Deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont la même pente.

4.1 Droites orthogonales

Propriété 16. Soit $\mathcal{D}_1$ une droite de vecteur directeur $\vec{u}_1$ et $\mathcal{D}_2$ une droite de vecteur directeur $\vec{u}_2$. Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont orthogonales si et seulement si les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont orthogonaux, ce qui est équivalent à $\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle = 0$.

Méthode pour trouver une équation cartésienne d'une droite orthogonale. On considère une droite $\mathcal{D}_1$ (déjà connue) de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$, et on fixe un point A. On cherche la droite $\mathcal{D}_2$ passant par A et orthogonale à $\mathcal{D}_1$. On commence par chercher un vecteur (non nul) orthogonal à $\vec{u}$; par exemple $\vec{v} \begin{pmatrix} -y_{\vec{u}} \\ x_{\vec{u}} \end{pmatrix}$ convient car $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ (voir le chapitre II). La droite $\mathcal{D}_2$ est la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{v}$; on est ramené à un cas déjà vu.

5 Rappels sur les triangles

Dans la suite, on considère trois points A, B, C formant un triangle (c'est-à-dire qu'ils ne sont pas alignés).

5.1 Triangles isocèles, équilatéraux, rectangles

Définition 17. Le triangle ABC est isocèle en A si $AB = AC$.
Le triangle ABC est équilatéral si $AB = AC = BC$.

Pour montrer que ABC est isocèle en A, il faut calculer AB et AC en utilisant $AB = \|\overrightarrow{AB}\|$ et $AC = \|\overrightarrow{AC}\|$ (voir la section 4 dans le chapitre II). Pour éviter les racines carrées, on calcule plutôt AB^2 et AC^2 et on montre que $AB^2 = AC^2$. De même, un triangle est équilatéral si $AB^2 = AC^2 = BC^2$.

Définition 18. Le triangle ABC est rectangle en A si les droites (AB) et (AC) sont orthogonales, ce qui est équivalent à $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = 0$.

Par le théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $BC^2 = AB^2 + AC^2$. Ceci fournit deux méthodes pour montrer qu'un triangle est rectangle (calcul d'un produit scalaire ou calcul de longueurs).

5.2 Droites particulières

La **médiane** issue de A dans le triangle ABC est la droite passant par A et par le milieu du segment $[BC]$.

La **hauteur** issue de A dans le triangle ABC est la droite passant par le point A perpendiculaire à la droite (BC).

La **médiatrice** du segment $[BC]$ est la droite passant par le milieu de $[BC]$ et qui est orthogonale à la droite (BC).

Propriété 19. Un point M appartient à la médiatrice de $[BC]$ si et seulement si $MB = MC$.

On a vu comment calculer les coordonnées du milieu d'un segment, comment calculer l'équation d'une droite passant par deux points donnés et comment calculer l'équation d'une droite passant par un point donné et orthogonale à une autre droite. Ceci permet de calculer les équations cartésiennes des médianes, médiatrices et hauteurs.

IV. Équation cartésienne d'un cercle

On se place dans un repère orthonormé du plan.

Définition 20. Soit A un point du plan et r un réel positif. Le cercle de centre A de rayon r est l'ensemble de points M tels que $AM = r$.

Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ de rayon $r \geq 0$. Le point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{C}$ si $AM = r \iff AM^2 = r^2$ (car AM et r sont positifs), avec $AM^2 = \|\overrightarrow{AM}\|^2$.
Le vecteur $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix}$, donc $AM^2 = (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2$.
On en déduit que Le point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement si $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = r^2$. Cette équation est une équation cartésienne de $\mathcal{C}$.

Exemple 21. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et de rayon $r = 3$. On considère un point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Le vecteur $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 2 \end{pmatrix}$, et $r^2 = 9$. On en déduit qu'une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ est $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$.

Remarque. On peut développer l'équation, ça reste une équation cartésienne de cercle, mais on préfère en général garder l'équation sous cette forme car on voit les coordonnées du centre.

Réciproquement, l'équation cartésienne $(x - a)^2 + (y - b)^2 = c$ est l'équation du cercle de centre $A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ de rayon $r = \sqrt{c}$ **si $\mathbf{c \geq 0}$**. Si $c < 0$, l'équation n'a pas de solution car $(x - a)^2 + (y - b)^2 \geq 0$ pour tous x, y.