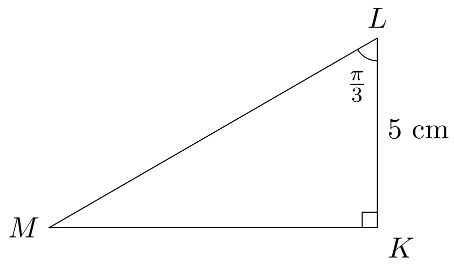
Corrigé du devoir surveillé n° 1 de géométrie

Exercice 1.



Le triangle KLM est rectangle en K, donc d'hypoténuse LM. On écrit les rapports trigonométriques dans ce triangle pour l'angle $\widehat{KLM}$. D'une part :

$$\begin{aligned}
\cos(\widehat{KLM}) &= \frac{LK}{LM}\\
\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{5}{LM}\\
\frac{1}{2} &= \frac{5}{LM}\\
LM &= 2\times 5 = 10 \text{ cm.}
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\sin(\widehat{KLM}) &= \frac{KM}{LM}\\
\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{KM}{10}\\
\frac{\sqrt{3}}{2} &= \frac{KM}{10}\\
KM &= 10\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} \text{ cm.}
\end{aligned}$$

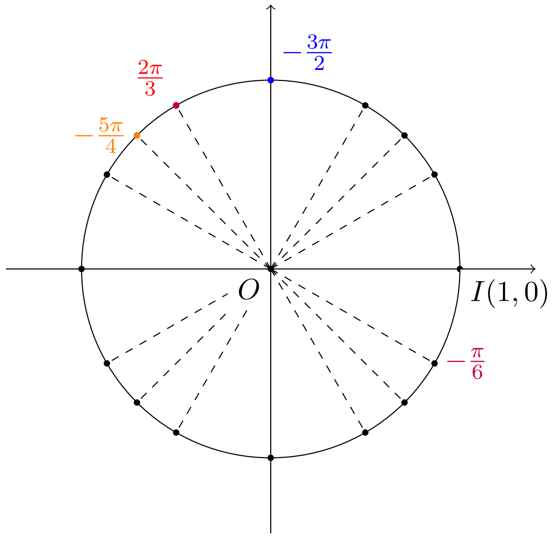
Remarques :

— La tangente aurait permis de trouver directement la longueur KM à partir des données du problème... tant que l'on sait retrouver la valeur de $\tan(\pi/3)$.

— Une fois que LM a été calculée, on connaissait deux longueurs dans le triangle rectangle KLM. On aurait pu retrouver la troisième longueur à l'aide du théorème de Pythagore.

— On dispose d'une valeur approchée (à $0,01$ cm) $KM \simeq 8,66$ cm. Ceci était plus long à obtenir, en l'absence de calculatrice, et n'était pas demandé.

Exercice 2.
1.



2. On remarque que $-\frac{3\pi}{2} + 2\pi = \frac{\pi}{2}$, donc $-\frac{3\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ sont congrus modulo 2π. Par conséquent,

$$\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$
$$\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Les points du cercle trigonométrique correspondants aux angles $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées ; en effet, $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$. Par conséquent,

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2},$$
$$\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Les points du cercle trigonométrique correspondants aux angles $-\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{6}$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. Par conséquent,

$$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Les points du cercle trigonométrique correspondants aux angles $-\frac{5\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. En effet, d'une part, $-\frac{5\pi}{4} = \pi - \frac{13\pi}{4}$, donc les points d'angles $-\frac{5\pi}{4}$ et $\frac{13\pi}{4}$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. D'autre part, $\frac{13\pi}{4} - 2\pi = \frac{\pi}{4}$, donc $\frac{13\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$ sont congrus modulo 2π (et correspondent donc au même point du cercle). Par conséquent,

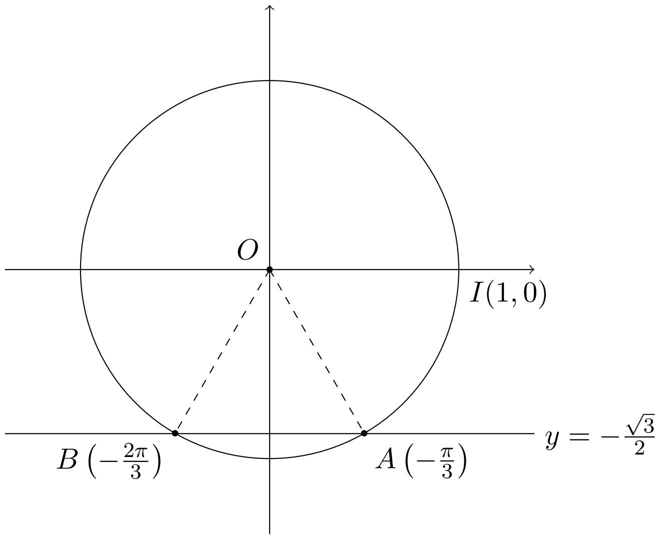
$$\cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi - \frac{13\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{13\pi}{4}\right) = -\cos\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi - \frac{13\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{13\pi}{4}\right) = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Remarque : les signes du cosinus et du sinus se lisent facilement sur la figure. Par exemple, le point correspondant à l'angle $\frac{2\pi}{3}$ est dans le quadrant supérieur gauche. Il a donc une abscisse strictement négative et une ordonnée strictement positive. Par conséquent,

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) < 0 \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) > 0.$$

Cela permet de détecter une erreur de signe éventuelle, mais ne remplace pas une démonstration !

Exercice 3.
1. Deux points du cercle trigonométrique ont une ordonnée de $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Appelons-les A et B. Ces points sont le symétrique l'un de l'autre par rapport à l'axe des ordonnées.



On trouve deux angles correspondant respectivement aux points A et B :

$$\theta_A = -\frac{\pi}{3} \quad \text{et} \quad \theta_B = -\frac{2\pi}{3}.$$

L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ à l'équation $\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ sont les réels congrus à θ_A ou θ_B modulo 2π, soit

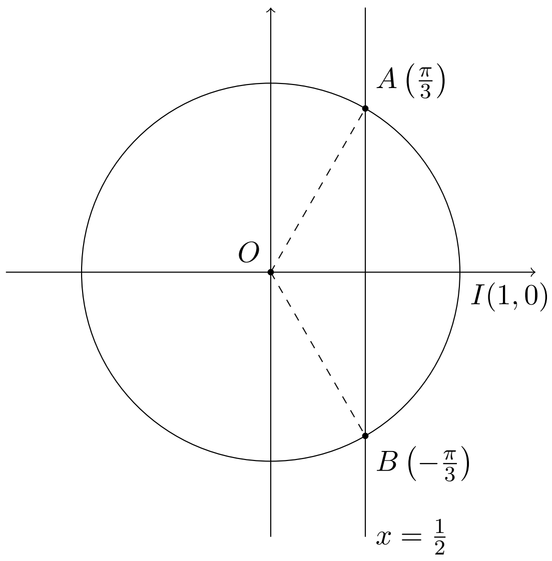
$$\left\{-\frac{\pi}{3} + 2\pi k \ : \ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \ : \ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Remarque : On peut démontrer que θ_A et θ_B sont bien solutions de l'équation. En effet,

$$\sin(\theta_A) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\sin(\theta_B) = \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ce calcul supplémentaire n'était pas nécessaire.

2. Deux points du cercle trigonométrique ont une abscisse de $\frac{1}{2}$. Appelons-les A et B. Ces points sont le symétrique l'un de l'autre par rapport à l'axe des abscisses.



On trouve deux angles correspondant respectivement aux points A et B :

$$\theta_A = \frac{\pi}{3} \quad \text{et} \quad \theta_B = -\frac{\pi}{3}.$$

On sait que $\cos(\theta_A) = \cos(\theta_B) = \frac{1}{2}$. Cependant, seul θ_B va satisfaire la condition supplémentaire $\sin(\theta_B) < 0$ (car B est dans la moitié inférieure du cercle trigonométrique, donc B est d'ordonnée négative).

L'ensemble des solutions réelles des équations $\cos(y) = \frac{1}{2}$ et $\sin(y) < 0$ est donc l'ensemble des réels congrus à θ_B modulo 2π, soit

$$\left\{-\frac{\pi}{3} + 2\pi k \ : \ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

On ne cherche pas toutes les solutions réelles, mais seulement celles dans l'intervalle $]0, 2\pi]$. Un seul de ces nombres appartient à l'intervalle $]0, 2\pi]$. Ce n'est pas $\theta_B = -\frac{\pi}{3}$, qui est négatif. Cependant, $-\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$ convient. L'unique réel $y \in]0, 2\pi]$ tel que $\cos(y) = \frac{1}{2}$ et $\sin(y) < 0$ est donc $\frac{5\pi}{3}$.

Exercice 4.

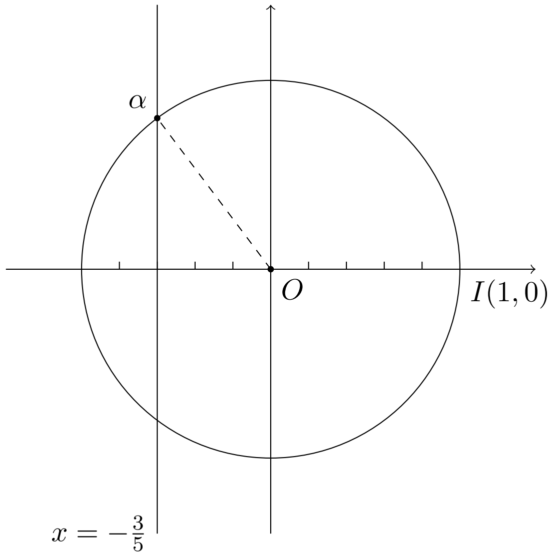
1. On sait que $\alpha \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, donc le point du cercle trigonométrique correspondant à α est dans le quadrant supérieur gauche. Ce point est donc d'ordonnée positive, donc $\sin(\alpha)$ est positif.

2. D'après le théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned}
\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) &= 1 \\
\left(-\frac{3}{5}\right)^2 + \sin^2(\alpha) &= 1 \\
\frac{9}{25} + \sin^2(\alpha) &= 1 \\
\sin^2(\alpha) &= 1 - \frac{9}{25} \\
\sin^2(\alpha) &= \frac{16}{25}.
\end{aligned}$$

Or $\sin(\alpha) \geq 0$, donc
$$\sin(\alpha) = +\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}.$$

3. Le point correspondant à l'angle α a pour abscisse $\cos(\alpha) = -\frac{3}{5}$, et est donc à l'intersection du cercle trigonométrique et de la droite d'équation $x = -\frac{3}{5}$. De plus, ce point est dans le quadrant supérieur gauche. Cela ne laisse qu'une possibilité.



Exercice 5.
1. On calcule :
$$\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{4 \times 2\pi}{4 \times 3} + \frac{3 \times \pi}{3 \times 4} = \frac{8\pi}{12} + \frac{3\pi}{12} = \frac{8\pi + 3\pi}{12} = \frac{11\pi}{12}.$$

Grâce aux formules d'addition, et en remarquant (si nécessaire) que le cosinus et le sinus de $\frac{2\pi}{3}$ ont été calculé au second exercice,
$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) \\
&= \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
&= -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= -\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= -\frac{1+\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= -\frac{(1+\sqrt{3})\sqrt{2}}{4}.
\end{aligned}$$

2.

On peut procéder de la même façon, en utilisant les formules d'addition :

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) &= \sin\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\\
&= \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\\
&= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\\
&= \frac{\sqrt{3}-1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\\
&= \frac{(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}}{4}.
\end{aligned}$$

Remarque : pour cette dernière question, il était possible de réutiliser le théorème de Pythagore, comme dans l'exercice 4. Cela demande cependant de déterminer à l'avance le signe de $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$, qui est positif (car angle dans le quadrant supérieur gauche). De plus, cela conduit à des calculs ici moins aisés.

Exercice 6.

1. Soit α un réel. D'après la formule d'addition appliquée à $a=b=\alpha$,

$$\cos(2\alpha)=\cos(\alpha)\cdot\cos(\alpha)-\sin(\alpha)\cdot\sin(\alpha)=\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha).$$

De plus, d'après le théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned}
\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha) &= 1\\
\sin^2(\alpha) &= 1-\cos^2(\alpha).
\end{aligned}$$

En substituant $\sin^2(\alpha)$ par cette dernière expression, on trouve

$$\cos(2\alpha)=\cos^2(\alpha)-\left[1-\cos^2(\alpha)\right]=\cos^2(\alpha)-1+\cos^2(\alpha)=2\cos^2(\alpha)-1.$$

2. D'après l'énoncé, $0\leq\beta\leq\frac{\pi}{2}$, donc $0\leq\frac{\beta}{2}\leq\frac{\pi}{4}$. Par conséquent, l'angle $\frac{\beta}{2}$ correspond à un point dans le quadrant supérieur droit, donc

$$\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\geq 0 \quad \text{et } \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\geq 0.$$

3. On applique le résultat de la première question à $\alpha=\frac{\beta}{2}$. On trouve

$$\begin{aligned}
\cos\left(2\frac{\beta}{2}\right) &= 2\cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right)-1\\
\frac{3}{4} &= 2\cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right)-1\\
2\cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right) &= \frac{3}{4}+1=\frac{7}{4}\\
\cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right) &= \frac{7}{8}.
\end{aligned}$$

Comme $\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \geq 0$, on trouve finalement

$$\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) = +\sqrt{\frac{7}{8}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{14}}{4}.$$

Le sinus peut alors se calculer à l'aide du théorème de Pythagore.

$$\begin{aligned}
\cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) &= 1 \\
\frac{7}{8} + \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) &= 1 \\
\sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) &= 1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8},
\end{aligned}$$

et là encore en utilisant le fait que $\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \geq 0$,

$$\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = +\sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Remarque : d'autres raisonnements sont possibles pour cette dernière question. Par exemple, en reprenant la première question, on peut trouver

$$\cos(\beta) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right),$$

et de là calculer $\sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)$. Une autre possibilité consiste à utiliser la formule de doublement d'angle pour le sinus :

$$\sin(\beta) = 2\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\beta}{2}\right),$$

qui permet de retrouver $\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)$ une fois que $\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)$ a été calculé.