TD 2 : Puissances, logarithmes et évolution à taux constant

Évolutions à taux constant

Ex 1. Une entreprise achète une machine au prix de 9000 euros. Elle estime que la machine se déprécie de 20% par an. On note V_0 la valeur initiale de la machine, tandis que $V_1, V_2, \ldots, V_n$ représentent les valeurs respectives de la machine au bout de un an, deux ans, ..., n années.
a. Écrire l'expression de V_n en fonction de n.
b. Calculer la valeur de la machine au bout de huit années de fonctionnement
c. Calculer la valeur de la machine au bout de 9 mois
d. Une machine d'un autre type a été revendue au bout de 5 ans à 3277 euros. Quelle était la valeur de la machine au moment de l'achat, sachant qu'elle se déprécie aussi de 20% par an ?
Solution. a. $V_n = 9000 \times (1 - \frac{20}{100})^n = 9000 \times 0,8^n$
b. On prend $n = 8$ dans la formule précédente : $V_8 = 1509,95$ euro
c. 9 mois= 9/12= 0,75 ans, donc on prend $n = 0,75$ et on trouve $V_{0,75} = 7613,07$ euro
d. On note W_n la valeur de la machine après n années. On a $W_n = W_0 \times 1,2^n$.
À l'instant présent, la machine vaut $W_0 = 3277$ euro.
À son achat, il y a 5 ans, elle valait $W_{-5} = 3277 \times 0,8^{-5} = 10\,000,61$ euros.

Calcul et conversion de taux

Ex 2. Résoudre les équations suivantes (en recherchant les solutions strictement positives) :
a. $x^2 = 25$ **b.** $y^{-0,5} = 10$ **c.** $(1+s)^5 = 10$ **d.** $3(1+t)^4 = 12$ **e.** $10 + 2y^{-0,5} = 28$ **f.** $z^3 = 4z^5$
Solution. a. On élève les deux membres à la puissance 1/2, et on trouve $x = 25^{\frac{1}{2}} = 5$ (ou on utilise la racine carrée...)
b. On élève les deux membres à la puissance $1/(-0,5) = -2$, et on trouve $y = 10^{\frac{1}{-0,5}} = 10^{-2} = 0,01$.
c. On élève les deux membres à la puissance $1/5$, et on trouve $(1+s) = 10^{\frac{1}{5}} \simeq 1,584893192$. De là, $s \simeq 1,584893192 - 1 = 0,584893192$.
d. Pour se ramener à une équation connue, on divise les deux membres de l'équation par 3. On trouve $(1+t)^4 = 4$.
On élève les deux membres à la puissance $1/4$, et on trouve $(1+t) = 4^{\frac{1}{4}} \simeq 1,414213562$. De là, $t \simeq 1,584893192 - 1 = 0,414213562$.
e. Pour se ramener à une équation connue, on commence par retrancher 10 des deux côtés, pour trouver $2y^{-0,5} = 18$.
Ensuite, en divisant par 2 de chaque côté, on trouve $y^{-0,5} = 9$.
On élève les deux membres à la puissance $1/(-0,5) = -2$, et on trouve $y = 9^{\frac{1}{-0,5}} = 9^{-2} \simeq 0,012345679$.
f. On divise de chaque côté par z^5, pour retrouver une équation connue : $z^3z^{-5} = z^{-2} = 4$.
On élève les deux membres à la puissance $1/(-2) = -0,5$, et on trouve $z = 4^{-0,5} = 0,5$.

Ex 3. La ville d'Aquilée perd sa population : le premier janvier 2012 elle comptait 500 000 habitants, tandis que le premier janvier 2017 elle n'avait plus que 400 000 habitants.
a. Quel est le taux moyen annuel de croissance ?
b. La ville d'Onessa est en forte expansion : au cours des 10 dernières années elle a triplé sa

population. Quel est le taux moyen annuel de croissance ?
Solution. a. Soit P_n la population l'année $2012+n$, et t le taux annuel de croissance. On a

$$P_n = P_0(1+t)^n,$$

avec $P_0 = 500000$ et $P_5 = 400000$. Ainsi,

$$400000 = 500000(1+t)^5.$$

On en déduit que $(1+t)^5 = \frac{400000}{500000} = 0,8$, donc $(1+t) = 0,8^{\frac{1}{5}} \simeq 0,956$ et $t \simeq 0,956 - 1 = -0,044 = -4,4\%$.
b. Soit t le taux de croissance annuel.
Le coefficient multiplicateur global sur 10 ans est de $(1+t)^10 = 3$, car la population a triplé.
On en déduit que $(1+t) = 3^{\frac{1}{10}} \simeq 1,116$, et $t \simeq 1,116 - 1 = 0,116 = 11,6\%$.

Ex 4. On dit que deux taux sont ***équivalents*** s'ils donnent lieu à la même croissance. Par exemple un taux mensuel t_m est ***équivalent*** à un taux annuel t_a si la valeur acquise en 12 mois par un euro placé au taux mensuel de t_m est égal à la valeur acquise en 1 an par un euro placé au taux annuel de t_a.
a. Quel est le taux annuel équivalent à un taux mensuel de 5% ?
b. Quel est le taux mensuel équivalent à un taux annuel de 48% ?
c. Quel est le taux trimestriel équivalent à un taux annuel de 55% ?
Solution. On note t_a le taux annuel, t_m le taux mensuel et t_t le taux trimestriel. Leurs valeurs dépendent de la question.
a. Au bout d'un an, le coefficient multiplicateur vaut $1+t_a = (1+t_m)^{12} = 1,05^{12} \simeq 1,7959$. On a donc $t_a \simeq 1,7959 - 1 = 0,7959 = 79,59\%$.
b. Au bout d'un an, le coefficient multiplicateur vaut $1+t_a = (1+t_m)^{12} = 1,48$. On a donc $1+t_m = 1,48^{\frac{1}{12}} \simeq 1,033$, et donc $t_m \simeq 0,033 = 3,3\%$.
c. Au bout d'un an, le coefficient multiplicateur vaut $1+t_a = (1+t_t)^4 = 1,55$. On a donc $1+t_t = 1,55^{\frac{1}{4}} \simeq 1,116$, et donc $t_m \simeq 0,116 = 11,6\%$.

Ex 5. Les chiffres d'affaire de trois entreprises ont augmenté à taux constant dans les dernières années.
— Le chiffre d'affaire de l'entreprise A augmente avec un taux **annuel** de 36%
— Le chiffre d'affaire de l'entreprise B augmente avec un taux **mensuel** de 3%
— Le chiffre d'affaire de l'entreprise C augmente avec un taux **semestriel** (sur 6 mois) de 18%
— Le chiffre d'affaire de l'entreprise D augmente avec un taux **bi-annuel** (sur 2 ans) de 72%
Laquelle des quatre entreprises a le plus fort taux de croissance ?
Solution. Les conversions donne des taux annuels, respectivement, de :
A : 36% B : 43% C : 39% D : 31%
L'entreprise B a le plus fort taux de croissance.
On remarque au passage qu'un taux annuel de 36% ne correspond pas à un taux mensuel de $36/12 = 3\%$, ni à un taux semestriel de $36/2 = 18\%$, ni à un taux bi-annuel de $36 \times 2 = 72\%$.

Trouver la durée : équation $b^x = a$

Ex 6. Résoudre les équations suivantes :
a. $0,8^t = 4$ **b.** $2 \times 4^y = 5$ **c.** $2 \times 4^y + 1 = 5$ **d.** $4^v = 3 \times 2^v$ **e.** $2 \times 0,9^n = 21 \times 0,2^n$
Solution. a. On applique le logarithme de chaque côté, pour trouver $t\log(0,8) = \log(4)$, soit $t = \log(4)/\log(0,8) \simeq = -6,21$.
On peut aussi utiliser directement la formule du cours $t = \log(4)/\log(0,8)$.
b. On se ramène d'abord à une équation de la forme $b^x = a$ en divisant par 2 de chaque côté : $4^y = 2,5$.
La formule du cours donne $y = \log(2,5)/\log(4) \simeq 0,66$.
pun On se ramène d'abord à une équation de la forme $b^x = a$ en soustrayant 1 :

$$2 \times 4^y = 4$$

Puis en divisant par 2 :

$$4^y = 2$$

.
La formule du cours donne $y = \log(2)/\log(4) = 0,5$ (il s'agit bien d'une équalité : on a $4^{0,5} = \sqrt{4} = 2$).

c. On divise par 2^v de chaque côté :

$$3 = 4^v/2^v = (4/2)^v = 2^v.$$

La formule du cours donne $v = \log(3)/\log(2) \simeq 1,58$.

d. On divise par $0,2^n$ de chaque côté :

$$21 = 2 \times 0,9^n/0,2^n = 2 \times (0,9/0,2)^n = 2 \times 4,5^n.$$

On divise par 2 pour obtenir $10,5 = 4,5^n$, et la formule du cours donne $n = \log(10,5)/\log(4,5) \simeq 1,56$.

Ex 7. La demande d'un certain bien augmente de 35% par an. Dans combien d'années la demande aura-t-elle doublée ?
Solution. Le coefficient multiplicateur global après n années vaut $(1+t)^n = (1+35/100)^n = 1,35^n$.
La demande aura doublé quand ce coefficient vaudra 2, donc quand $1,35^n = 2$.
On trouve $n = \log(2)/\log(1,35) \simeq 3,66 ans \simeq$ 3 ans et 8 mois.

Ex 8. Un site internet A a 30 000 inscrits et un taux de croissance mensuel de 10%. Le site concurrent B a 10 000 inscrits et un taux de croissance mensuel de 20%. Si les taux de croissance restent constants, dans combien de temps le site B aura-t-il le même nombre d'inscrits que le site A ?
Solution. Soient :
a_n = nombre d'inscrits sur le site A après n mois,
b_n = nombre d'inscrits sur le site B après n mois.

On a $a_n = 30000 \times 1,1^n$ et $b_n = 10000 \times 1,2^n$. Les deux sites auront le même nombre d'inscrits quand $a_n = b_n$, soit $30000 \times 1,1^n = 10000 \times 1,2^n$.
On divise les deux membres par $1,1^n$ puis par 10000. On trouve $(1,2/1,1)^n = 30000/10000 = 3$, et donc $n = \log(3)/\log(1,2/1,1) \simeq 12.62$.
Il faudra donc attendre environ 13 mois.

Exercices facultatifs

Ex 9. Jusqu'en 2007, le salaire net du Président de la République s'élevait à 7084 Euros par mois. Il a augmentée de 172% en 2008, puis a été gelé depuis. En mai 2012 le nouveau Président annonce une baisse de salaire de 30%. Un invité d'une radio publique commentait ainsi cette annonce : "ça fera encore 142% d'augmentation". 1. Calculer le nouveau salaire de 2008.
2. Calculer le salaire du nouveau Président après mai 2012.
3. Donner le taux d'augmentation global entre avant hausse de 2007 et après la baisse de 2012. Commenter les propos entendus à la radio.
Solution. 1. 19 268,48
2. 13 487,94
3. +90

Ex 10. En 2017, Anne achète des actions de 3 sociétés : Alax (1€ l'action), Bavar (2€ l'action), Circa (4€ l'action).
Au total, elle achète 1200 actions pour un montant de 2 900 €.
Aujourd'hui, par rapport à 2017, le prix de l'action Alax n'a pas évolué , l'action Bavar a baissé de 50 %, et l'action Circa a augmenté de 50 %. Actuellement , le portefeuille d'Anne vaut 3 200€.
On souhaite déterminer le nombre d'actions de chaque société achetées par Anne.

a. Mettre en équation le problème.

b. Résoudre

Solution. a =nombre d'actions Alax
b =nombre d'actions Bavar
c =nombre d'actions Circa

$$\begin{cases} a+b+c=90 & \text{Au total, elle achète 90 actions} \\ 6a+8b+10c=730 & \text{Valeur portefeuille en janvier} \\ 2\times 6a+1,25\times 8b+0,6\times 10c=840 & \text{Valeur portefeuille en septembre} \end{cases}$$

On trouve $a=20$, $b=45$, $c=25$.

Ex 11. (plus difficile) Une vidéo vient d'apparaître sur les réseaux sociaux. Le jour de sa publication, elle avait déjà enregistré 400 "vues" et le nombre journalier de nouvelles "vues" a augmenté de 10% par jour pendant plusieurs semaines.

a. Écrire le nombre y_n de nouvelle vues enregistré le jour n.

b. Calculer le nombre **total** de vues enregistrées
— à la fin du premier jour t_1
— à la fin du deuxième jour t_2
— à la fin du cinquième jour t_5

c. Calculer le nombre **total** de vues t_n enregistrés à la fin du n-ème jour. Exprimer t_n en fonction de n utilisant la formule $1+a+\cdots+a^{n-1}=\frac{a^n-1}{a-1}$.

d. Calculer le nombre **total** de vues enregistrés à la fin du 15ème jour

e. Pendant quelle journée le nombre total de vues aura dépassé le 30 000 ?