

TD SEMAINE 5 : CALCUL DE DURÉES

L'objectif de la semaine est de calculer la durée pour atteindre un certain seuil dans des évolutions à taux constant.

Considérons l'énoncé suivant :

Au 1er janvier 2010, une ville a 135 000 habitants. Sa population croît au taux moyen de 2% par an. À quelle date atteindra-t-elle les 200 000 habitants ?

MODÉLISATION

On modélise la population de la ville comme suivant une évolution au taux constant de $t = 2\% = 0,02$ par **an**. Soit P_n la population n **années** après le 01/01/2010. Alors :

$$P_n = P_0(1 + t)^n = 135\,000 \times 1,02^n.$$

On cherche n tel que $P_n = 200\,000$, c'est-à-dire :

$$135\,000 \times 1,02^n = 200\,000.$$

RÉSOLUTION

Comme pour les recherches de taux, nous allons d'abord isoler le terme $1,02^n$. Ensuite, nous appliquerons le logarithme de chaque côté de l'équation pour faire descendre l'exposant.

$$135\,000 \times 1,02^n = 200\,000$$

$$1,02^n = \frac{200\,000}{135\,000} \simeq 1,48$$

$$\log(1,02^n) \simeq \log(1,48)$$

$$n \log(1,02) \simeq \log(1,48)$$

$$n \simeq \frac{\log(1,48)}{\log(1,02)} \simeq 19,85$$

La population de la ville atteindra les 200 000 habitants environ 19,85 ans = 19 ans et $0,85 \times 12 \simeq 10$ mois après le 01/01/2010, c'est-à-dire en novembre 2029.