Vecteurs

Damien Thomine

1er février 2018

Les vecteurs

Objectif

Dans le supérieur, la géométrie affine (ou euclidienne) est développée à partir de la géométrie vectorielle.

Les élèves de collège sont familiers avec la géométrie euclidienne, mais pas avec la géométrie vectorielle.

Question : comment introduire la géométrie vectorielle à partir de la géométrie euclidienne ?

Les programmes sont malheureusement peu détaillés, et peu clairs sur la question...

Quelques repères

4e : Déplacements du plan. Translations (définition naturelle). Frises et pavages.

2nde : Translations (définition rigoureuse). Vecteurs : définition, somme et produit par un réel. Colinéarité. Équations réduites. La somme est introduite *via* la composition des translations.

1eS : Déterminant et équations cartésiennes de droites. Produit scalaire.

TS : Même chose, mais dans l'espace.

Groupes

Qu'est-ce qu'un groupe ?

Exemples :

- $\mathcal{S}(\Sigma)$: permutations de l'ensemble Σ ;
- $(\mathbb{R}^n, +)$;
- $(\mathbb{Z}, +)$;
- $GL_n(\mathbb{R})$;
- transformations affines du plan euclidien ;
- transformations affines préservant l'aire du plan euclidien ;
- isométries du plan euclidien ;
- isométries directes du plan euclidien ;
- translations du plan euclidien ;
- rotations directes autour d'un point...

Actions de groupes

Beaucoup de groupes apparaissent naturellement comme groupes de transformations d'un certain objet.

Soit G un groupe et X un ensemble. Une **action** de G est la donnée d'un morphisme de G dans $Aut(X)$. Autrement dit, c'est une réalisation de G comme groupe de transformations de X.

Un même groupe peut agir sur des objets très différents, et beaucoup de groupes différents peuvent agir sur le même objet.

Exemples :

- $\mathcal{S}(\Sigma)$ sur Σ ;
- $GL_n(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^n$;
- transformations affines, isométries, translation, etc. sur le plan euclidien ;
- $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}$: à (x, y) on associe la translation par x ;
- $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^2$: à x on associe la translation par $(x, 0)$;
- $O_3(\mathbb{R})$ sur la sphère ;
- $\mathcal{S}_4$ sur un tétaèdre régulier (par isométries) ;
- $\mathcal{S}_4$ sur un cube (par isométries directes)...

Différents types d'actions de groupes

Une action est dite *libre* si aucun élément non trivial n'a de point fixe ($\forall g \in G,\ \forall x \in X :\ [g(x) = x] \Rightarrow [g = e]$).

Une action est dite *transitive* si, pour tous x_1 et $x_2 \in X$, on peut envoyer x_1 sur x_2 en utilisant un élément de G ($\forall x_1, x_2 \in X,\ \exists g \in G :\ g(x_1) = x_2$).

Une action est dite *simplement transitive* si elle est libre et transitive ($\forall x_1, x_2 \in X,\ \exists! g \in G :\ g(x_1) = x_2$).

Exemples :

- $\mathcal{S}(\Sigma)$ sur Σ :
- $GL_n(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^n$:
- isométries sur le plan euclidien :
- translations sur le plan euclidien :
- $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}$:
- $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^2$:
- $O_3(\mathbb{R})$ sur la sphère :
- $\mathcal{S}_4$ sur un tétaèdre régulier (par isométries) :
- $\mathcal{S}_4$ sur un cube (par isométries directes) :

Exemples :

- $\mathcal{S}(\Sigma)$ sur Σ : transitive
- $GL_n(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^n$:
- isométries sur le plan euclidien : transitive

Actions simplement transitives

On part d'un ensemble X. Si c'est possible, comment construire un groupe G agissant sur X simplement transitivement ?

Méthode 1 (algébrique) : définir directement un bon groupe de transformations G. La loi de groupe est la composition.

Méthode 2 (géométrique) : si un tel groupe G existe, pour tout couple $(x, y) \in X^2$, il existe un unique $g \in G$ tel que $g(x) = y$. On pourrait poser $g = yx^{-1} := (x, y)$. Cependant, plusieurs couples (x, y) correspondent au même élément g, donc on passe au quotient : $G \simeq X^2_{/\sim}$. L'information sur l'action est cachée dans la relation $\sim$, qu'il faut définir à la main.

La loi de groupe est la concaténation : pour tous $x, y \in X$, on a $e = [xx^{-1}]$, $[yx^{-1}]^{-1} = [xy^{-1}]$ et $[zy^{-1}][yx^{-1}] = [zx^{-1}]$. Loi de Chasles.

Méthode 3 (géométrique, bis) : Fixons $x_0 \in X$. Alors, pour tout $x \in X$, il existe un unique $g \in G$ tel que $x = g(x_0)$. On obtient donc une bijection entre X et G (qui dépend de x_0 !). Il reste à définir à la main la loi de groupe.

Remarque : on peut passer d'un point de vue à un autre.

Exemple 1 : les translations du plan

X est le plan euclidien. $G \simeq \mathbb{R}^2$ sera un espace vectoriel.

Méthode 1 : définir le groupe G des translations du plan euclidien. Un vecteur est une translation. La loi de groupe est la composition.

Méthode 2 : définir une relation d'équivalence sur les couples de points. La loi de groupe est la concaténation.

Méthode 3 : fixer une origine. Tout point de X devient un élément d'un groupe, si l'on définit la bonne loi de groupe.

Exemple 2 : les entiers relatifs

On se donne une droite graduée et orientée. X est l'ensemble des graduations. $G \simeq \mathbb{Z}$.

Méthode 1 : définir le groupe G des translations de la droite qui présevent les graduations. Un entier relatif est une translation. La loi de groupe est la composition.

Méthode 2 : définir une relation d'équivalence sur les couples de points. La loi de groupe est la concaténation.

Méthode 3 : fixer une origine. Toute graduation correspond alors à un entier relatif.

Exemple 3 : les angles orientés

Comment définir un angle orienté ? ici, X est le cercle, ou de façon équivalente l'ensemble des directions (et sens) du plan.

Méthode 1 : un angle orienté est une rotation vectorielle. Ajouter deux angles, c'est composer les rotations.

Méthode 2 : définir une relation d'équivalence sur les couples de directions. La loi de groupe est la concaténation.

Méthode 3 : fixer une origine. Toute point du cercle correspond alors à un angle orienté (cercle trigonométrique). Somme : par exemple par les parallèles.

Vecteurs : une définition

Informellement, un vecteur est défini par :

- sa direction (la droite par laquelle il est porté) ;
- son sens (son orientation le long de la drotie) ;
- sa longueur.

Formellement, on identifie les couples de points (A, B) et (C, D) tels que :

- les droites (AB) et (CD) sont parallèles ;
- (A, B) et (C, D) sont dans le même sens ;
- $AB = CD$...

... si $A \neq B$ et $C \neq D$. On définit à par le vecteur nul. On note la classe d'équivalence $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Proposition : On définit ainsi une relation d'équivalence.

Somme de vecteurs

La somme de vecteurs est définie par leur concaténation (relation de Chasles). Informellement, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Formellement : soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs, et A un point du plan.
Soit B tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$.
Soit C tel que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{v}$.
On pose $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} := \overrightarrow{AC}$.

Proposition : Soient $\overrightarrow{u}$ un vecteur et M un point du plan. Il existe un unique point N tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{MN}$.

Proposition : La somme ainsi définie ne dépend pas du point A choisi.

Aparte : vecteurs et parallélogrammes

Soit $ABCD$ un parallélogramme. Alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Pour montrer que la somme de vecteurs est bien définie, on veut utiliser la réciproque : si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ alors $ABCD$ est un parallélogramme.

Qu'est-ce qu'un parallélogramme plat ?

- Côtés opposés parallèles ?
- Côtés opposés de même longueur ?

... ou l'on se contente de l'équivalence $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ si et seulement si $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Multiplication d'un vecteur par un réel

Soient $\vec{u}$ un vecteur et λ un réel. On définit le vecteur $\lambda\vec{u}$ comme le vecteur :

- de même direction que $\vec{u}$;
- de même sens que $\vec{u}$ si $\lambda > 0$, et de sens opposé si $\lambda < 0$;
- de longueur $|\lambda|$ fois la longueur de $\vec{u}$.

... les cas $\vec{u} = \vec{0}$ et $\lambda = 0$ sont à définir à part.
... il faudrait vérifier que la notion de longueur de vecteur est bien définie.

Formellement : soient $\vec{u} \neq \vec{0}$ un vecteur, λ un réel et A un point du plan.
Soit B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.
Soit C d'abscisse λ sur la droite (AB) dans le repère (A, B).
On pose $\lambda\vec{u} := \overrightarrow{AC}$.

Proposition : La multiplication ainsi définie ne dépend pas du point A choisi.

Et ensuite...

Passage en coordonnées. Définition des coordonnées d’un vecteur, addition et multiplication par un réel en coordonnées.

Les coordonnées permettent de démystifier ces opérations d’addition et de multiplication, et de démontrer facilement les axiomes d’espace vectoriel.

Passage en coordonnées : exposé de Gabriel.

Axiomes d’espace vectoriel : exposé de Thibault.

Introduire les vecteurs

Longtemps, les vecteurs étaient introduits via l'identification de couples de points. Maintenant, la logique du programme est hybride : identification de couples de points, mais s'appuyant sur les transformations (point de vue algébrique) :

- Définir les translations du plan (4ème) : à deux points A et B, on associe la translation qui envoie A sur B.
- Introduire les vecteurs comme couples de points correspondant à la même translation (2nde). Composition et relation de Chasles.
- Fixer un repère. Coordonnées de vecteurs et opérations algébriques : addition, multiplication par un réel.

À aucun moment on n'identifie explicitement vecteur et translation. Cependant, les translations permettent :

- d'introduire les vecteurs et leur relation d'équivalence ;
- d'introduire la somme de vecteurs (composition des translations) ;
- de glisser un certains nombre de points techniques sous le tapis (non démontrés au cycle 4, admis en 2nde).

Écueil : les documents Eduscol de cycle 4

Citations extraites du document ressource “Géométrie plane”, Cycle 4.

Du cycle 2 au cycle 4, le contrôle des propriétés géométriques passe de la perception au dessin, puis à une géométrie plus abstraite, contrôlée par le raisonnement, qu’il soit formalisé ou non par une démonstration écrite.

Même document :

Les autres transformations (translations, rotations, homothéties) sont introduites pour décrire ou pour construire certains objets, notamment les frises, pavages et rosaces. Elles peuvent être découvertes avec les fonctionnalités des logiciels de géométrie. Elles sont essentiellement utilisées avec ces logiciels, et leur définition formalisée en tant qu’applications ponctuelles n’est pas un attendu.

On vous demande de faire de la géométrie en 4ème dans le même cadre qu’à l’école primaire (géométrie perceptive).
Pas de définition, pas de raisonnement possible, a fortiori pas d’utilisation des translations comme outils de démonstration.

Les translations : définition

Question : Comment définir une translation au collège ?

Version intuitive : Translater une figure, c'est la déplacer sans la déformer, la faire tourner, ou la changer de taille.

Version formelle : À toute paire de points du plan A et B, on associe la translation de A vers B. Étant donné un point C du plan, cette translation envoie C sur le point D tel que $ABDC$ soit un parallélogramme.

Ce qui est souvent présenté comme *méthode de construction* est en fait une *définition*. Il ne faut pas l'oublier !

Propriétés sous-jacentes

Certaines propriétés intuitives peuvent être admises par les élèves (*cf. le cours sur les axiomes en géométrie*) ou cachées :

- Les translations sont des isométries.
- Pour tous A et B, il existe une unique translation qui envoie A sur B.
- La composée de deux translations est une translation.
- Les translations commutent.

Les compositions de translations sont travaillées dans le cadre des frises et pavages. Pensez à concaténer les vecteurs !

Grilles

Un savoir-faire consiste à appliquer des translation à des objets en s'aidant d'une grille.

Avantage : introduire les coordonnées d'un vecteur sans introduire de point base (en d'autre termes, les coordonnées du vecteur ne dépendent pas du point base).

Ne pas encore écrire en coordonnées ; préférer au début "2 pas à droite, 1 pas vers le bas" plutôt que $(2, -1)$, afin de ne pas identifier encore vecteur et coordonnées.

Tous les exemples de grilles trouvées sont orthonormées...

Résumé

Penser à introduire le matériel suivant sur les translations dès le cycle 4 :

- méthode de construction des translations (présentée comme définition ou non) ;
- représentation par des flèches ;
- vocabulaire de direction (pas dans le sens usuel !), sens, longueur ;
- les pavages, compositions de translations et concaténations de flèches ;
- le vocabulaire de vecteur.

Le lien avec la physique sont à votre discrétion (cf. sous-section suivante).

Définition physique

Une physique, une définition possible est par exemple :

Un vecteur est une grandeur ayant une direction, un sens et une magnitude.

Les vecteurs sont représentés par des flèches.

Dans une certaine mesure, on peut s'appuyer sur ce type de définition pour dresser des parallèles entre mathématiques et physique (ce qui enrichit les deux). En particulier, on pourra :

- utiliser le vocabulaire de direction, sens, longueur ;
- représenter les vecteurs par des flèches.

Notamment, les notions de direction (parallélisme) et de longueur sont déjà présentes en mathématiques, et une flèche représente naturellement un déplacement (donc une translation).

Aspect kinésthétique

En physique, les vecteurs sont introduits pour représenter des forces (puis s'étendent à d'autres grandeurs : vitesse, accélération, moment cinétique, champs électrique et magnétique...).

En plus d'une intuition visuelle (géométrique), on dipose occasionnellement d'une intuition kinesthétique. Par exemple ("The Singular Mind of Terry Tao", New York Times, 24 juillet 2015) :

Early in his career, he struggled with a problem that involved waves rotating on top of one another. He wanted to come up with a moving coordinate system that would make things easier to see, something like a virtual SteadiÂcam. So he lay down on the floor and rolled back and forth, trying to see it in his mind's eye. "My aunt caught me doing this," Tao told me, laughing, "and I couldn't explain what I was doing."

C'est le cas ici : on se représente mentalement une force agissant sur soi par sa direction, son sens et son intensité, pas par des coordonnées.

Attention aux écarts

Faites attention aux différences entre physique et mathématique.

- Comme toute grandeur physique, les vecteurs en physique ont une unité.
- En physique, le point d'application est important : on travaille avec des paires (position, vecteur) ! Il détermine par exemple le couple appliqué à un solide. Il n'est en général pas possible de translater impunément des vecteurs ayant des points d'application différents, contrairement au traitement mathématique.
- Dès la troisième, les élèves peuvent rencontrer des champs de vecteurs en technologie (champs de contraintes sur une construction).

Définition

Deux points A et B définissent une unique translation qui envoie A sur B. Cette translation est appelée **translation de vecteur** $\overrightarrow{AB}$.

Définition : deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux s'ils définissent la même translation, ou de façon équivalente :

- D est l'image de C par la translation qui envoie A sur B ;
- B est l'image de A par la translation qui envoie C sur D ;
- $ABDC$ est un parallélogramme (éventuellement aplati) ;
- les segments $[AD]$ et $[BC]$ ont même milieu.

Définition : vecteur nul $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$.

Somme et produit

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. La somme $\vec{u} + \vec{v}$ est le vecteur correspondant à la translation par $\vec{u}$, suivie de la translation par $\vec{v}$.

Propriété utilisée : la composée de deux translation est une translation. L'associativité est gratuite (la composition de fonctions est associative). La commutativité des translations implique que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.

Théorème (loi de Chasles) : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Propriétés du vecteur nul, inverse. Éventuellement : notation $A + \vec{u}$ pour le translaté de A par $\vec{u}$.

Le produit d'un vecteur par un réel est défini comme précédemment.

Quelques avantages

Cette approche a plusieurs avantages :

- introduire naturellement la relation d'équivalence ("correspondre à la même translation") ;
- faire le lien avec le point de vue algébrique, et introduire naturellement la somme de vecteurs ;
- arnaquer les élèves en faisant prendre pour acquis des choses non démontrées au collège, ni explicitées.

Pour tous points A et B, existe-t-il une unique translation envoyant A sur B ?
La composition de deux translations est-elle une translation ?

Cycle 4 : attention aux manuels !

Comme vu précédemment, il faudrait idéalement introduire :

- méthode de construction des translations (présentée comme définition ou non) ;
- représentation par des flèches ;
- vocabulaire de direction (pas dans le sens usuel !), sens, longueur ;
- les pavages, compositions de translations et concaténations de flèches ;
- éventuelleemnt, le vocabulaire de vecteur.

Extraits de manuels.

Et faites aussi attention aux exercices proposés (*cf. Mission Indigo*)...

Autour de la définition de vecteur

D'autres définitions de vecteur en gémétrie euclidienne existent :

- On identifie (A, B) et (C, D) si $ADBC$ est un parallélogramme, en traitant à part les cas d'alignement (Perrin).
- On identifie (A, B) et (C, D) si les segments $[AC]$ et $[BD]$ ont même milieu (définition officielle jusqu'en 2019).

Avantage : ne fait pas intervenir le sens...

Inconvénient : ... explicitement.

Définition du produit par un réel

Le programme laisse la liberté d'introduire la multiplicaiton par un réel géométriquement ou en coordonnées. De nombreux manuels utilisent les coordonnées. C'est plus simple, mais il y a plusieurs inconvénients :

- on veut pouvoir utiliser la multiplication par un réel dans un contexte géométrique (alignement de points, centre de gravité du triangle, barycentre...), car elle donne toute sa puissance aux méthodes vectorielles. Cependant, il est peu cohérent de définir cette opération en coordonnées et de revenir ensuite au point de vue géométrique.
- l'interprétation de la multiplication par un réel en termes de direction, sens, longueur est extrêmement importante. Elle est plus naturelle dans des contextes géométriques, physiques...
- en introduisant la multiplication géométriquement, on n'a pas à montrer (ou admettre) qu'elle est indépendante du repère choisi.

Colinéarité

Définition : Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires s'il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{u} = \lambda \overrightarrow{v}$ ou $\overrightarrow{v} = \lambda \overrightarrow{u}$.

Informellement : si $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ sont non nuls, ils sont colinéaires si et seulement s'ils sont portés par des droites parallèles.

Proposition : Trois points du plan A, B, C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

C'est cette proposition qui permet de développer la théorie des équations de droites.

Avec une définition géométrique de la multiplication par un scalaire : **démonstration**.

Avec une définition en coordonnées : ?.

Travailler en coordonnées : les limites

Le point de vue géométrique est plutôt délaissé dans les programmes. Il y a une tentation de travailler purement numériquement (traduire un problème en équations que l'on résout), quitte à ne pas faire de figure :

> *La relation de Chasles est introduite pour illustrer l'addition des vecteurs, mais ne fait pas l'objet d'un travail spécifique.*

Cependant, le point de vue géométrique reste important, ne serait-ce que pour vous. Une des forces de la géométrie analytique est d'allier les deux points de vue, la géométrie guidant les calculs.

Exemple : résolution de système linéaire et intersection de droites, de plans...

Travailler géométriquement : le besoin d'un méthode

Que ce soit en travaillant géométriquement ou algébriquement, sans méthode, l'élève risque de faire des calculs au hasard en espérant aboutir.

Exemple : Petit x numéro 53 (2000).

Soit ABCD un parallélogramme. Soit I le milieu de $[AB]$*. Soit E le point du segment* $[ID]$ *tel que* $3IE = ID$*. Montrer que les points A, E et C sont alignés.*

Travailler géométriquement : le besoin d'un méthode (2)

Les élèves se retrouvent à appliquer de façon répétée la relation de Chasles en espérant tomber sur le bon résultat (**cf. article**).

Propriété fondamentale du plan : on peut exprimer tout vecteur comme combinaison linéaire de deux vecteurs formant un base.

Méthode : fixer deux vecteurs formant une base, et exprimer les vecteurs d'intérêt dans cette base. En bref, sans le dire, travailler en coordonnées.