Géométrie (3 heures)

Variétés et applications sont C^∞.

Exercice 1. Soit M la bande de Möbius ($M = [0,1]\times[0,1]/(0,y) \sim (1,1-y), y \in [0,1]$).

a) Calculer $\pi_1(M)$. Expliciter $j_* : \pi_1(\partial M) \to \pi_1(M)$ où j est l'injection canonique de ∂M dans M.

Soit maintenant B l'espace obtenu en recollant deux copies de M sur leur bord ($B = M \amalg M'/x \sim x', x \in \partial M$).

b) Calculer $\pi_1(B)$.

Exercice 2. Soit $P^2(\mathbf{R})$ l'ensemble des droites linéaires L de $\mathbf{R}^3$. On note (x_1, x_2, x_3) les coordonnées de $\mathbf{R}^3$. Soit $(\phi_t)_{t\in\mathbf{R}}$ le flot sur $\mathbf{R}^3$, $\phi_t(x_1,x_2,x_3) = (e^t x_1, e^{2t}x_2, e^{3t}x_3)$.

a) Vérifier que (ϕ_t) donne un flot sur $P^2(\mathbf{R})$ encore noté (ϕ_t). Déterminer ses points fixes (les droites L telles que $\phi_t(L) = L$ pour tout t).

Soient $\psi_i : U_i \to (x_i = 1) \simeq \mathbf{R}^2$ les trois cartes de $P^2(\mathbf{R})$ ($U_i =$ les droites $L \not\subset (x_i = 0)$ et $\psi_i(L) = L \cap (x_i = 1)$).

b) Expliciter $\psi_i \circ \phi_t \circ \psi_i^{-1}$.

Soit X le champ de vecteurs sur $P^2(\mathbf{R})$ induit par (ϕ_t) ($X(L) = \frac{d}{dt}\phi_t(L)|_{t=0}$).

c) Écrire X dans les cartes ψ_i.

d) Calculer les indices des zéros de X.

e) Quelle est la caractéristique d'Euler de $P^2(\mathbf{R})$?

Exercice 3. Soient S une surface compacte connexe sans bord et $f : S \to \mathbf{R}$ une fonction de Morse avec exactement un minimum (au niveau -1), un maximum (au niveau 1), et une selle (au niveau 0). Soit $\epsilon > 0$ petit.

a) Dire pourquoi le sous-niveau $(f \le -\epsilon)$ et le sur-niveau $(f \ge \epsilon)$ sont tous les deux homéomorphes à un disque.

b) Dire pourquoi le sous-niveau $(f \le \epsilon)$ est homéomorphe à $(f \le -\epsilon) \cup_\phi [0,1] \times [0,1]$ (où $\phi : [0,1] \times \{0,1\} \to (f = -\epsilon)$ est un plongement).

c) Montrer que $(f \le \epsilon)$ est homéomorphe à une bande de Möbius.

d) Montrer que S est homéomorphe à $P^2(\mathbf{R})$.

T.S.V.P.

Exercice 4. Soit $M \subset \mathbf{R}^3$ une surface compacte connexe sans bord.

Soient $\gamma : S^1 \to \mathbf{R}^3$ un lacet et $f : M \times S^1 \to \mathbf{R}^3$ définie par $f(x,t) = x - \gamma(t)$.

a) Vérifier que f n'est pas surjective. En déduire que $\deg_2 f = 0$.

On suppose de plus γ transverse à M, i.e. si $\gamma(t)$ est dans M alors $\gamma'(t)$ n'est pas tangent à M (on voit aussi le cercle unité S^1 comme $[0,1]/0 \sim 1$).

b) Montrer que 0 est une valeur régulière de f. En déduire que $\gamma^{-1}(M)$ contient un nombre pair de points.

c) Déduire de ceci que $\mathbf{R}^3 \backslash M$ n'est pas connexe par arcs (raisonner par l'absurde et construire un lacet ne coupant M qu'une fois transversalement).