Géométrie (2h)

Exercice 1. Soit $\mathbf{R}^3$ muni de ses coordonnées (x, y, z). Soient $L = (x = y = 0)$ l'axe vertical et $\Gamma = (z = 0, x^2 + y^2 = 1)$, $\Gamma' = (z = 0, (x-2)^2 + y^2 = 1)$ deux cercles horizontaux.

a) Calculer $\pi_1(\mathbf{R}^3 \setminus L)$.

b) Soient j et j' les injections canoniques de Γ et Γ' dans $\mathbf{R}^3 \setminus L$. Calculer $j_*(\pi_1(\Gamma))$ et $j'_*(\pi_1(\Gamma'))$.

c) Existe-t-il un homéomorphisme f de $\mathbf{R}^3$ tel que $f(\Gamma) = \Gamma'$ et $f(L) = L$?

Exercice 2. Soit la bouteille de Klein $K = Q/_{\mathcal{R}}$ avec $Q = [0,1] \times [0,1]$ et $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence $(x, 0) \sim (x, 1)$ et $(0, 1-y) \sim (1, y)$ $(0 \leq x, y \leq 1)$.

a) Montrer que $\pi_1(K)$ a pour présentation $< a, b | aba^{-1}b >$ (écrire $K = U_1 \cup U_2$ avec $U_1 = Q^*/_{\mathcal{R}}$ et $U_2 = \overset{\circ}{Q}$, où Q^* est le carré privé de son centre).

Soit G le sous-groupe du groupe des homéomorphismes de $\mathbf{R}^2$ engendré par s et t où $s(x, y) = (x + 1, -y)$ et $t(x, y) = (x, y + 1)$.

b) Montrer que $s \circ t = t^{-1} \circ s$. En déduire que tous les éléments de G s'écrivent $s^n \circ t^m$ avec n, m dans $\mathbf{Z}$.

c) Montrer que G agit proprement et librement sur $\mathbf{R}^2$.

d) Soit $p : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2/G$. Montrer que $p|_Q$ est surjective. En déduire que K s'identifie à $\mathbf{R}^2/G$.

e) Montrer que $\pi_1(K)$ est isomorphe à G.

Exercice 3. Soit $P = S^2/_{x \sim -x}$ le plan projectif. On note $[N] = [S]$ la classe du pôle Nord (c'est aussi celle du pôle Sud) dans P. On pose $X = P_1 \amalg P_2/_{[N_1] \sim [N_2]}$ l'espace obtenu en prenant deux copies de P et en identifiant leurs classes du pôle Nord.

a) Quel est le revêtement universel de P ? Calculer $\pi_1(P)$.

b) Montrer que $\pi_1(X) = \mathbf{Z}/_{2\mathbf{Z}} * \mathbf{Z}/_{2\mathbf{Z}}$.

c) On note a et b les générateurs des deux copies de $\mathbf{Z}/_{2\mathbf{Z}}$. Décrire les éléments de $\mathbf{Z}/_{2\mathbf{Z}} * \mathbf{Z}/_{2\mathbf{Z}}$.

d) Soit $\tilde{X} = \amalg_{n \in \mathbf{Z}} (S^2)_n /_{N_n \sim S_{n+1}}$ l'espace obtenu en recollant une infinité de copies de la sphère par leurs pôles comme indiqué. Montrer que $\tilde{X}$ est simplement connexe. Expliciter la projection de $\tilde{X}$ sur X qui en fait le revêtement universel.

e) Dessiner le revêtement connexe de X correspondant au sous-groupe engendré par ab dans $\pi_1(X)$. Expliciter sa projection sur X.