TD 05 : Flot géodésique en courbure constante négative

1. **MÉLANGE DU FLOT GÉODÉSIQUE**

Soit M une surface compacte, connexe, orientable, de genre $g \geq 2$. On munit M d'une métrique Riemannienne de courbure constante, égale à -1. Le but de cet exercice est d'étudier le flot géodésique sur T^1M, c'est-à-dire la trajectoire d'une particule circulant sans frottements ni forces extérieures sur M.

Soit $X_0 \in M$, et $\Gamma := \pi_1(M, x_0)$. Alors le revêtement universel de M est isométrique au demi-plan de Poincaré $\mathbb{H} := \{x + iy : x \in \mathbb{R},\ y > 0\}$ munit de la métrique hyperbolique :

$$\langle v, w \rangle_z = \frac{(v, w)}{\Im(z)^2}.$$

Le groupe Γ agit librement et par isométries directes sur $\mathbb{H}$. L'espace $\mathbb{H}$ a cependant un groupe d'isométries beaucoup plus gros : ce groupe est isomorphe à $PSL_2(\mathbb{R})$, et l'action est par homographies :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Le groupe $PSL_2(\mathbb{R})$ agit naturellement sur $T^1\mathbb{H}$. Cette action est libre et transitive.

(a) Vérifier que l'action par homographies est bien une action de groupe.
(b) Montrer que $\Im(A \cdot z) = |cz + d|^{-2}\Im(z)$.
(c) Vérifier que l'action par homographies est bien une action par isométries.
(d) Soit $z \in 0 + i\mathbb{R}_+^*$. Calculer $d(i, z)$.
(e) Soit $(\hat{g}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ le flot géodésique sur $T^1\mathbb{H}$. En utilisant la question précédente, trouver $\hat{g}_t(i, i)$. Quelle est la trajectoire d'un point quelconque de $T^1\mathbb{H}$ par $(\hat{g}_t)$?

On définit les flots horocycliques stable et instable par :

$$\hat{h}_t^+(i, i) = \left(\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot (i, i) \right),$$

et :

$$\hat{h}_t^-(i, i) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \cdot (i, i) \right),$$

puis en étendant ces flots à $T^1\mathbb{H}$ par multiplication *à droite*.

(f) Dessiner la trajectoire de (i, i) suivant $(\hat{h}_t^+)$ et $(\hat{h}_t^-)$.
(g) Montrer que :

$$\begin{cases} \hat{g}_t \circ \hat{h}_s^+ & = & \hat{h}_{se^{-t}}^+ \circ \hat{g}_t \ ; \\ \hat{g}_t \circ \hat{h}_s^- & = & \hat{h}_{se^t}^- \circ \hat{g}_t \ ; \\ \hat{h}_{\frac{t^{-1}-1}{\varepsilon}}^+ \circ \hat{h}_\varepsilon^- \circ \hat{h}_{\frac{t-1}{\varepsilon}}^+ \circ \hat{h}_{-\frac{\varepsilon}{t}}^- & = & \hat{g}_{2\ln(t)}. \end{cases}$$

L'action à droite des flots géodésique et horocycliques commute avec l'action à gauche de Γ. Les flots géodésique et horocycliques passent au quotient en des flots (g_t), (h_t^+) et (h_t^-) sur T^1M, qui vérifient toujours les relations ci-dessus. Nous allons maintenant nous intéresser à leurs propriétés dynamiques sur T^1M. On montre notamment que le flot géodésique est mélangeant sur T^1M, munit de la mesure de Liouville $Liouv$ (qui est invariante par chacun des trois flots)[1].

(h) Montrer que $h_{top}(h^+) = h_{top}(h^-) = 0$.
(i) Montrer que $(T^1M, (g_t), Liouv)$ est mélangeant si et seulement si, pour tout $f \in \mathbb{L}^2(T^1M, Liouv)$ d'intégrale nulle, toute valeur d'adhérence $\mathbb{L}^2$-faible de $(f \circ g_t)_{t\geq 0}$ est nulle.
(j) Soit f comme ci-dessus. Montrer que toute valeur d'adhérence $\mathbb{L}^2$-faible de $(f \circ g_t)_{t\geq 0}$ est (h_s^+)-invariante. De même, montrer que toute valeur d'adhérence $\mathbb{L}^2$-faible de $(f \circ g_t)_{t\leq 0}$ est (h_s^-)-invariante.
(k) Montrer que toute fonction de $\mathbb{L}^2(T^1M, Liouv)$ qui est (h_s^+)-invariante est aussi (g_t)-invariante.
(l) En déduire que toute valeur d'adhérence $\mathbb{L}^2$-faible de $(f \circ g_t)_{t\geq 0}$ est à la fois (g_t), (h_s^+) et (h_s^-)-invariante. Conclure.

On remarquera que le mélange du flot géodésique n'utilise pas exactement le fait que la surface M est compacte ; l'hypothèse que M est de surface finie suffit.

[1] La preuve utilisée ici est due à Yves Coudène.

2. **UNIQUE ERGODICITÉ DU FLOT HOROCYCLIQUE**

On se place dans le contexte de l'exercice précédent. Le but de cet exercice est de montrer que les flots horocycliques sont uniquement ergodiques [2].

(a) Montrer que les flots $(h_t^+)_{t\in\mathbb{R}}$ et $(h_{-t}^-)_{t\in\mathbb{R}}$ sont conjugués.

(b) Soient $f \in \mathcal{C}(T^1M, \mathbb{C})$ et δ, $t > 0$. Montrer que :

$$\frac{1}{t}\int_0^t f \circ h_s^+ \, \mathrm{d}s = \delta^{-1}\int_0^\delta f \circ g_{-\ln(t/\delta)} \circ h_s^+ \, \mathrm{d}s \circ g_{\ln(t/\delta)} =: M_t^\delta(f) \circ g_{\ln(t/\delta)}.$$

(c) Soit ω le module de continuité de f, et $\varepsilon > 0$. Montrer que, si x et y dont tels que $d(x,y) < \varepsilon$ et x, y appartiennent au même morceau de variété instable faible, alors $|f \circ g_{-\ln(t)}(x) - f \circ g_{-\ln(t)}(y)| \leq \omega(\varepsilon)$ pour tout $t \geq 0$.

(d) Montrer que, si δ est suffisamment petit, on peut trouver pour tout x une boîte à flot dont le support est $V_x := \bigcup_{y \in h^+_{(0,1)}(x)} W_\delta^{wy}(y)$.

(e) Borner $M_t^\delta(f)(x) - \mathbb{E}(f|V_x)$. En déduire que $(M_t^\delta(f))_{t>0}$ est équicontinue.

(f) Soit $\mathcal{I}$ la tribu des invariants du flot horocyclique stable. Déduire de ce qui précède que $\mathbb{E}(f|\mathcal{I})$ a une version continue $\overline{f}$, et que $\frac{1}{t}\int_0^t f \circ h_s^+ \, \mathrm{d}s$ converge uniformément vers $\overline{f}$ quand t tend vers $+\infty$.

Il reste à montrer que $\overline{f}$ est constante. On se fixe $\varepsilon > 0$, et x et y dans T^1M.

(g) Montrer que $\overline{f}$ est (h_t^+)-invariante.

(h) Montrer que si le flot horocyclique est topologiquement transitif, alors il est uniquement ergodique.

(i) Montrer que, pour presque tous x' et y' dans T^1M, il existe $T > 0$ tel que $d(g_T(x'), g_T(y')) < \varepsilon$. On pourra utiliser le fait que le flot géodésique est mélangeant.

(j) Soient $x' \in B(x,\varepsilon)$, $y' \in B(y,\varepsilon)$ et $T > 0$ tels que $d(g_T(x'), g_T(y')) < \varepsilon$. Montrer que l'on peut trouver $z \in W^{wu}(g_T(y'), 2\varepsilon) \cap h^+(g_T(x'))$.

(k) Montrer que $g_{-T}(z) \in h^+(x')$. Que pouvez-vous dire de $d(g_{-T}(z), y')$? Conclure.

Finalement, on va voir sur un exemple que l'hypothèse de compacité est nécessaire[3]. Considérons le quotient[4] de $\mathbb{H}$ par $PSL_2(\mathbb{Z})$. On rappelle qu'un domaine fondamental pour cette action est donné par $\{z \in \mathbb{H} : \ |z| \geq 1, \ |Re(z)| \leq 1/2\}$.

(l) Montrer que le flot géodésique agissant sur T^1M a une orbite périodique. En conjugant avec le flot géodésique, trouver une famille à 1 paramètre d'orbites périodiques. Conclure.

3. **MÉLANGE D'AUTOMORPHISMES DU TORE**

Soit $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ une matrice telle que $|Tr(A)| > 2$. On rappelle que A a deux valeurs propres réelles, de module différent de 1. On fait agir A sur le tore $\mathbb{T}^2$, muni de la mesure de Lebesgue.

En s'inspirant de la démonstration du mélange du flot géodésique en courbure négative, montrer que $(\mathbb{T}^2, Leb, A)$ est mélangeant.

---

[2] L'argument utilisé ici est encore une fois dû à Yves Coudène. Voir *A short proof of the unique ergodicity of horocyclic flows*. Contemporary Mathematics, American Mathematical Society, Vol. 485, 2009, 85–89.

[3] Ce qui n'est pas le cas pour la propriété de mélange du flot géodésique.

[4] Qui n'est pas une variété mais un orbifold ; cela ne change rien à la définition des flots géodésiques et horocycliques. Si l'on veut, on pourra utiliser le sous-groupe de congruence $\Gamma[2]$, qui est sans torsion, à la place de $PSL_2(\mathbb{Z})$.