

## TD 04 : Homéomorphismes et difféomorphismes du cercle

## 1. HOMÉOMORPHISMES DE NOMBRE DE ROTATION RATIONNEL

Le but de cet exercice est de comprendre la structure des homéomorphismes du cercle dont le nombre de rotation est rationnel. Dans ce qui suit, on voit le cercle comme l'espace  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , et le nombre de rotation d'un homéomorphisme  $f$  du cercle est noté  $\tau(f)$  ; enfin,  $f$  sera un homéomorphisme du cercle.

- Montrer que  $\tau(f) = 0$  si et seulement si  $f$  a un point fixe. En déduire que, si  $\tau(f) = p/q \in \mathbb{Q}$ , alors  $f$  a une orbite  $q$ -périodique.
- Réciproquement, si  $f$  préserve l'orientation et a une orbite de période minimale  $p/q$ , montrer que  $\tau(f) = p/q$  et que, pour tout  $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , la suite  $(x, f(x), \dots, f^{q-1}(x))$  est dans le même ordre circulaire que  $(0, p/q, 2p/q, \dots, (q-1)p/q)$ .
- Montrer que, si  $f$  renverse l'orientation, alors  $\tau(f) = 0$ .
- Supposons que  $\tau(f) = p/q \in \mathbb{Q}$ , et que  $f$  a une période attractive ou répulsive. Montrer que tout homéomorphisme  $\|\cdot\|_\infty$ -proche de  $f$  est de nombre de rotation  $p/q$ .

On s'intéresse maintenant aux classes de conjugaisons d'homéomorphismes du cercle.

- Montrer que tous les homéomorphismes du cercle de nombre de rotation nul et avec exactement un point fixe sont conjugués.
- Soit  $f$  un homéomorphisme du cercle avec exactement  $n \geq 1$  orbites périodiques. Montrer que, si aucune orbite périodique n'est semi-stable, alors  $n$  est pair.
- Soient  $p/q \in \mathbb{Q}$  et  $n \geq 2$  un nombre pair. Soient  $f_1, f_2$  deux homéomorphismes directs du cercle, avec exactement  $n$  orbites périodiques, de même nombre de rotation, et sans orbite semi-stable. Montrer que  $f_1$  et  $f_2$  sont conjugués.
- Soit  $p/q \in \mathbb{Q} \setminus \{0, 1/2\}$  et  $n \geq 1$ . On considère l'ensemble des homéomorphismes directs de cercle, de nombre de rotation  $p/q$ , qui ont exactement  $n$  orbites périodiques, et dont ces orbites sont toutes semi-stables. Montrer que cet ensemble a exactement 2 classes de conjugaison. Montrer que, si  $p/q \in \{0, 1/2\}$ , alors il n'y a plus qu'une classe de conjugaison.
- On considère l'ensemble des homéomorphismes directs de cercle, de nombre de rotation  $p/q$ , qui ont exactement  $n$  orbites périodiques. Montrer que cet ensemble a au plus  $2^n$  classes de conjugaison. Les expliciter et les compter dans le cas  $n \in \{1, 2, 3\}$  (attention aux nombres de rotation dans  $\{0, 1/2\}$  !).

Finalement, on s'occupe des applications ayant un nombre infini d'orbites périodiques.

- Soit  $f$  un homéomorphisme direct du cercle, de nombre de rotation rationnel. On suppose que  $f$  a une infinité non dénombrable d'orbites périodiques. Montrer que  $f$  a un facteur topologique non trivial qui est une rotation.

## 2. EXEMPLE DE DENJOY

Le théorème de Denjoy affirme qu'un difféomorphisme du cercle de nombre de rotation irrationnel et dont la dérivée est à variation bornée (par exemple, un difféomorphisme de classe  $\mathcal{C}^2$ ) est conjugué topologiquement à une rotation irrationnelle. Le but de cet exercice est de construire des exemples de difféomorphismes de nombre de rotation irrationnel, mais non conjugués à des rotation irrationnelle. Leur dérivée, nécessairement, sera moins régulière (elle sera höldérienne).

L'idée est la suivante : on part d'une rotation irrationnelle d'angle  $\tau$ . On fixe une orbite  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} = (R_\tau^n(x))_{n \in \mathbb{Z}}$ . Ensuite, on remplace les points de cette orbite par des intervalles  $(I_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ , et on envoie chaque intervalle sur le suivant. Pour cela, on se fixe :

- Une suite  $(\ell_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  de réels strictement positifs, tels que  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \ell_n \leq 1$  ;
- Une fonction tente  $h(a, \ell, x) := 1 - \ell^{-1}|2(x - a) - \ell|$ .

On répartit les intervalles  $(I_n)$  sur  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , de telle sorte que chaque  $I_n$  soit de longueur  $\ell_n$ , et que l'espace entre  $I_n$  et  $I_m$  soit  $(1 - \sum_n \ell_n)d(x_n, x_m) + \sum_{x_k \in (x_n, x_m)} \ell_k$ . On définit une application  $f$  par :

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \notin \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I_n \\ 1 + c_n h(a_n, \ell_n, x) & \text{si } x \in I_n \end{cases},$$

où  $a_n$  est le point gauche de  $I_n$ , et où  $(c_n)$  est une suite bien choisie.

- Quelle valeur de  $c_n$  faut-il choisir pour garantir que  $f$  envoie  $I_n$  sur  $I_{n+1}$  ?
- On veut que  $f$  soit de dérivée continue. Quelle contrainte cela impose-t-il sur  $(\ell_n)$  ?
- On veut que  $f$  soit un difféomorphisme du cercle. Quelle contrainte cela impose-t-il sur  $(\ell_n)$  ?
- Soit  $\alpha \in [0, 1)$ . Supposons que  $|c_n| \leq K(\alpha)\ell_n^\alpha$  pour une certaine constante  $K(\alpha)$  indépendante de  $n$ . Montrer que  $f'$  est  $\alpha$ -holdérienne.
- Soit  $\alpha \in [0, 1)$ . Montrer que l'on peut trouver une suite  $(\ell_n)$  qui satisfait toutes les conditions désirées.
- Décrire le compact minimal  $K(f)$  de  $f$ . Montrer que, pour tout nombre de rotation irrationnel, pour tout  $t \in [0, 1)$ , on peut trouver une telle fonction  $f$  telle que la mesure invariante du compact minimal est  $t$ .
- Montrer que  $f|_{K(f)}$  est conjuguée à une rotation irrationnelle. En déduire que  $f$  admet une unique mesure de probabilité invariante, qui est absolument continue si et seulement si  $t > 0$ .

(h) Pour tout  $\beta > 0$ , Construire un exemple  $f$  tel que  $|f'(x) - f'(y)| \leq C|x - y| |\ln |x - y||^{1+\beta}$ . Est-ce possible pour  $\beta = 0$  ?

---