TD 05 : Brouwer, Sard, Poincaré, Hopf.

1. **THÉORÈME DE PERRON-FROBENIUS**

Soit $n \geq 1$, et soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice à coefficients positifs ou nuls. On suppose qu'aucune colonne de A n'est nulle. On pose $\Delta := \{x \in [0,1]^n : \sum_i x_i = 1\}$.

(a) Expliciter l'action projective de A sur Δ.

(b) En déduire que A a une valeur propre strictement positive λ, dont un vecteur propre associé x_λ est à coordonnées positives ou nulles.

(c) x_λ est-il nécessairement à coordonnées strictement positives ?

On renforce les hypothèses sur A : maintenant, on suppose que A est *irréductible*, c'est-à-dire que pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, il existe $m \geq 1$ tel que $(A^m)_{ij} > 0$ [1].

(d) Vérifier que x_λ est à coordonnées strictement positives, et que λ est égal au rayon spectral de A (indication : si μ est une valeur propre de module maximal et y_μ un vecteur propre associé, considérer $x_\lambda + \varepsilon(e^{i\psi} y_\mu + e^{-i\psi}\overline{y_\mu})$, et bien choisir ε et ψ).

(e) λ est-elle nécessairement l'unique valeur propre de module maximal ?

Finalement, on suppose que A est *apériodique*, c'est-à-dire qu'il existe $m \geq 1$ tel que A^m soit à coefficients strictement positifs [2].

(f) Montrer que λ est une valeur propre géométriquement simple [3].

2. **INDICE DE CHAMPS DE VECTEURS**

(a) Étant donnés les champs de vecteurs suivants sur $\mathbb{S}_2$, dessiner les lignes de champ, trouver les points où les champs s'annulent, et calculer leur indice en ces points.

$$X(x,y,z) := \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad Y(x,y,z) := \begin{pmatrix} xz \\ yz \\ z^2-1 \end{pmatrix}; \qquad Z(x,y,z) := \begin{pmatrix} 1-z-x^2 \\ -xy \\ x(1-z) \end{pmatrix}.$$

(b) Définir un champ de vecteur continu sur $\mathbb{T}^2$, vue comme surface plongée dans $\mathbb{R}^3$ par $(\theta,\varphi) \mapsto ((2+\cos(\varphi))\cos(\theta), (2+\cos(\varphi))\sin(\theta), \sin(\varphi))$, qui ne s'annule pas.

(c) Soit $n \geq 2$ un entier. Dessiner les lignes du champ de vecteur $\nabla(\Re(z^n))$ sur $\mathbb{C}$. Quel en est l'indice en 0 ?

(d) $g \geq 2$ un entier. Construire une champ de vecteur sur une surface orientable, compacte, connexe de genre g qui ne s'annule qu'en un seul point. On pourra par exemple utiliser la construction d'une telle surface en recollant les côtés opposés d'un polygone convexe régulier à $4g$ côtés.

3. **PLONGEMENT DE WHITNEY**

Le but de cet exercice est de montrer une forme faible du théorème de plongement de Whitney [4] :

Théorème 1.
Soit $n \geq 0$. Soit M une variété rélle $\mathcal{C}^\infty$ compacte de dimension n. Alors il existe un plongement de M dans $\mathbb{R}^{2n+1}$.

On rappelle qu'étant donné une telle variété M, il existe $N \geq 0$ et un plongement de M dans $\mathbb{R}^N$. Le but est donc de contrôler la dimension N de l'espace d'arrivée. Dans ce qui suit, on fixe la dimension n et la variété M. De plus, étant donné $N \geq 0$ et $X \in \mathbb{S}_{N-1}$, on note π_X la projection orthogonale parallèlement à $Vect(X)$.

(a) Soient $N \geq 0$ et $\varphi : M \to \mathbb{R}^N$ un plongement de M. Supposont que $N > 2n+1$. Montrer que $\pi_X \circ \varphi$ est injective pour presque tout $X \in \mathbb{S}_{N-1}$. On pourra construire une application bien choisie $g : \varphi(M)^2 \setminus \Delta \to \mathbb{S}_{N-1}$, où Δ est la diagonale de $\varphi(M)^2$.

(b) Soient $N \geq 0$ et $\varphi : M \to \mathbb{R}^N$ un plongement de M. Supposont que $N > 2n+1$. Montrer que $\pi_X \circ \varphi$ est une immersion pour presque tout $X \in \mathbb{S}_{N-1}$. On pourra construire une application bien choisie [5] $g : T\varphi(M) \to \mathbb{S}_{N-1}$, où $T\varphi(M) = \{(x,v) : x \in \varphi(M),\ v \in T_x\varphi(M)\}$ est la variété tangente à $\varphi(M)$.

(c) Conclure.

4. **THÉORÈME DE BORSUK-ULAM**

Le théorème de Borsuk-Ulam est le suivant.

1. Cela est équivalent à la connexité d'un graphe orienté si A en est la matrice d'ajacence, ou à l'ergodicité d'une chaîne de Markov si A en est la matrice de transition.
2. Cela est équivalent à la propriété de mélange d'une chaîne de Markov si A en est la matrice de transition.
3. En fait, l'hypothèse d'irréductibilité suffit à démontrer que λ est algébriquement simple. L'apériodicité apporte en plus le fait que λ est l'unique valeur propre de module maximal.
4. La version forte améliore la dimension de l'espace d'arrivée de $2n+1$ à $2n$.
5. En travaillant avec la projectivisation de TM, on peut gagner une dimension : cet argument reste valable pour $N > 2n$.

Théorème 2.
Soit $n \geq 0$. Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{S}_n, \mathbb{R}^n)$. Alors il existe $x \in \mathbb{S}_n$ tel que $f(x) = f(-x)$.

Par exemple, pour $n = 2$, ce théorème affirme que l'on peut trouver deux points sur Terre, antipodaux, en lesquels la température et la pression sont identiques.

(a) Démontrer le théorème de Borsuk-Ulam pour $n \in \{0, 1\}$.

Dans un premier temps, nous allons démontrer par récurrence que le degré d'une application impaire d'une sphère sur elle-même est impair.

(b) Soit $f : \mathbb{S}_0 \to \mathbb{S}_0$ une application impaire. Montrer que $\deg(f)$ est impair.
(c) Soit $n \geq 1$. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{S}_n, \mathbb{S}_n)$ une application impaire. Montrer que, quitte à composer f avec une rotation, on peut supposer que les pôles Nord et Sud sont des points réguliers de f, et ne sont pas dans $f(\mathbb{S}_{n-1} \times \{0\})$.
(d) Soit π la projection orthogonale sur le plan $\{z = 0\}$. Montrer que $\deg(f)$ est le nombre de préimages de 0 par $\pi \circ f_{|\{z \geq 0\}}$, comptées avec leur orientation.
(e) Montrer que $\pi \circ f_{|\{z=0\}}$ est de degré impair. En déduire que $\deg(f)$ est impair.

Finalement, on se donne une application $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{S}_n, \mathbb{R}^n)$.

(f) Supposons que $f(x) \neq f(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{S}_n$. Construire une application $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{S}_n, \mathbb{S}_{n-1})$ telle que $g(x) = -g(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{S}_n$.
(g) Montrer que $g_{|\mathbb{S}_{n-1} \times \{0\}}$ est de degré impair.
(h) Montrer que $g_{|\mathbb{S}_{n-1} \times \{0\}}$ est isotope à une constante. Conclure.

5. **ENTRELACEMENTS DE CERCLES**

Soient f et g deux plongements de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{S}_1$ dans $\mathbb{R}^3$. On suppose que leurs images sont disjointes, et on définit :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{T}^2 & \to & \mathbb{S}_2 \\ (x,y) & \mapsto & \frac{f(x)-g(y)}{\|f(x)-g(y)\|} \end{array} \right. .$$

Pour tout $X \in \mathbb{S}_2$, on note π_X la projection orthogonale parallèlement à $Vect(X)$. On dit que $\pi_X \circ f$ et $\pi_X \circ g$ sont *transverses* si pour tout (x, y) tel que $\pi_X \circ f(x) = \pi_X \circ g(y)$, les vecteurs $(\pi_X \circ f)'$ et $(\pi_X \circ g)'$ sont linéairement indépendants.

(a) Montrer que $\pi_X \circ f$ et $\pi_X \circ g$ sont des immersions pour tout X dans un ouvert de $\mathbb{S}_2$ de mesure pleine.
(b) Montrer que $\pi_X \circ f$ et $\pi_X \circ g$ sont transverses pour presque tout $X \in \mathbb{S}_2$. On pourra appliquer le théorème de Sard à φ et $-\varphi$.
(c) Justifier que l'ensemble des vecteurs X tels que $\pi_X \circ f$ et $\pi_X \circ g$ soient transverses est ouvert.
(d) Justifier le fait qu'il existe un ouvert dense $U \subset \mathbb{S}_2$ tel que, pour tout $X \in U$, les courbes $\pi_X \circ f$ et $\pi_X \circ g$ soient des immersions transverses, et que si $\pi_X \circ f(x) = \pi_X \circ g(y)$, alors $(\pi_X \circ f)^{-1}(\{x\})$ et $(\pi_X \circ g)^{-1}(\{y\})$ soient des singletons.
(e) On choisit un vecteur X vérifiant les propriétés ci-dessus. On dessine $\pi_X \circ f$ et $\pi_X \circ g$, en marquant à chaque croisement quelle courbe passe au-dessus de l'autre. On obtient des diagrammes comme celui qui suit :

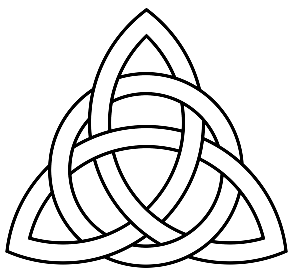

FIGURE 1 – Un nœud celtique.

Comment peut-on lire le degré de φ sur un tel diagramme ?
(f) En déduire que les deux cercles dont le diagramme est donné ci-dessus ne sont pas isotopes, dans $\mathbb{R}^3$, aux cercles $C_1 \cup C_2$, où $C_1 = \{x^2 + y^2 = 1,\ z = 0\}$ et $C_2 = \{x^2 + y^2 = 1,\ z = 1\}$.
(g) De même, montrer que $\{x^2 + y^2 = 1,\ z = 0\} \cup \{(x-1)^2 + z^2 = 1,\ y = 0\}$ n'est pas isotope, dans $\mathbb{R}^3$, à $C_1 \cup C_2$.