Séminaire de Master 2

Cette année, le thème général des séminaires de M2 est *Géométrie et dynamique*. Il est divisé en trois parties : théorie ergodique et approximation diophantienne, temps de récurrences linéaires, et géométrie kälhérienne. Les outils utilisés incluent des éléments de théorie ergodique, de la géométrie hyperbolique, de l'analyse complexe et p-adique, ainsi que de la géométrie complexe et des équations aux dérivées partielles.

Les étudiants devront choisir un sujet parmis les 13 proposés. Il leur sera demandé d'effectuer une présentation d'une heure et demi, et de rédiger des notes (de préférence typographiées, mais des notes manuscrites propres seront aussi acceptées).

1 Théorie ergodique et approximation diophantienne

Les cinq premiers exposés portent sur la théorie des approximations diophantiennes (approximations de nombres réels par des rationnels), et les liens avec certains systèmes dynamiques : la transformation de Gauss et, à un niveau plus fondamental, le flot géodésique sur la surface modulaire. Tout d'abord, pour trois exposés, nous travaillerons sur des résultats classiques en théorie des approximations diophantiennes : théorèmes de Khintchine et de Jarnik, spectres de Lagrange et de Markoff... Ensuite, nous ferons le lien avec des objets géométriques, et en particulier nous chercherons à traduire les propriétés de certains nombres réels comme propriétés de certaines géodésiques sur la surface modulaire.

I - Approximation diophantienne et développement en fractions continues [A5, Ch. 3.1 et 3.2] [A8]

Définitions. Principe de Dirichlet. Transformation de Gauss et ergodicité. Constante de Kintchine. Hyperbolicité et théorème de Kintchine.

II - Mesure d'irrationalité [A1] [A5, Ch. 3.3]

Définition. Nombres liouvilliens et diophantiens. Généricité (au sens de la mesure et au sens topologique). Cas particuliers : nombres mal approchables, irrationnels quadratiques, nombres algébriques. Théorèmes de Liouville et de Thue-Siegel-Roth. Dimension de Hausdorff et théorème de Jarnik.

III - Spectres de Markoff et de Lagrange [A2, Ch. II] [A3, Ch. 1 à 3]

Rappel sur les nombres mal approchables et théorème de Hurwitz. Spectre de Lagrange et de Markoff. Formes quadratiques et chaînes de Markoff. Constante de Freiman.

IV - Flot géodésique sur la surface modulaire [A4, Ch. II.3] [A5, Ch. 9.4 et 9.5]

$\mathbb{H}^2$, métrique hyperbolique de courbure constante. Action de $PSL_2(\mathbb{R})$ par homographies. Action de $PSL_2(\mathbb{Z})$ et domaine fondamental. Surface modulaire. Géodésiques et horocycles, ergodicité.

V - Flot géodésique et approximation diophantienne [A4, Ch. II.4 et VII] [A5, Ch. 9.6] [A6] [A7]

Hauteur des géodésiques dans la surface modulaire et développement en fractions continues. Transformation de Gauss. Nombres mal approchables. Spectre de Lagrange et géodésiques closes.

2 Temps de récurrences linéaires

Les quatre exposés suivants portent sur une application de l'analyse p-adique à des problèmes d'algèbre et de dynamique. Les deux premiers de ces exposés montrent un contraste entre la dynamique analytique complexe et la dynamique analytique p-adique d'un point de vue local. Ensuite, nous verrons comment l'utilisation des nombres p-adiques permet de comprendre les temps de récurrence dans des variétés algébriques d'une part, et certaines propriétés des groupes linéaires finiment engendrés d'autre part.

I - Dynamique locale sur $\mathbb{C}$ [B11, Ch. II] [B14, Ch. 8 et 10]
Dynamique des applications analytiques d'une variable complexe au voisinage d'un point fixe et linéarisation. Rotations d'angles rationnels et pétales. Rotations d'angles irrationnels diophantiens et théorie de Kolmogorov-Arnold-Moser.

II - Dynamique locale sur $\mathbb{Q}_p$ [B13, Partie II] [B17]
Analyse non archimédienne ($\mathbb{Z}_p$ et $\mathbb{Q}_p$, topologie, fonctions analytiques et convergence, théorème de Strassmann). Linéarisation au voisinage d'un point fixe.

III - Temps de récurrences linéaires [B9] [B10] [B12, Ch. 5] [B16]
Problème des récurrences linéaires. Théorème de Skolem-Mahler-Lech et démonstration. Généralisations : temps de passage dans des variétés algébriques, conjecture de Mordell-Lang dynamique.

IV - Théorèmes de Malcev et de Selberg [A4, Ch. II.3] [B12, Ch. 5] [B15]
Groupes linéaires. Propriétés virtuelles et résiduelles. Théorèmes de Malcev et de Selberg, démonstration. Exemple de $PSL_2(\mathbb{Z})$ et revêtements de la surface modulaire. Groupes infinis, finiment engendrés, non résiduellement finis ou non virtuellement sans torsion (groupes de Thompson, de Tarski).

3 Géométrie kählérienne

Les quatre derniers exposés sont consacrés au thème de la géométrie kählérienne. Les variétés kählériennes sont une généralisation naturelle en géométrie différentielle des variétés projectives de la géométrie algébrique complexe. Dans ce sens, on consacrera un premier exposé aux propriétés fondamentales des métriques kählériennes avec application immédiate sur la structure de la cohomologie (théorie de Hodge). Un second exposé sera quant à lui consacré au théorème de plongement de Kodaira, caractérisant les variétés projectives complexes parmi les variétés kählériennes. Le troisième exposé abordera le théorème de Calabi-Yau, résultat fondamental de géométrie différentielle, et sera décrit au quatrième exposé le problème voisin des métriques de Kähler-Einstein, impliquant des liens profonds entre résolution d'EDP géométriques et propriétés algébriques des variétés sous-jacentes.

I - Complexe, hermitien, kählérien : trousse de survie [C20] [C22, Ch.1] [C23, Ch.0]
Variétés complexes, structure complexe ; théorème de Newlander-Nirenberg ("Frobenius" pour les structures complexes). Métriques hermitiennes, métriques kählériennes, identités kählériennes. Fibrés vectoriels holomorphes, théorie de Chern-Weil. Théorie de Hodge des variétés kählériennes.

II - Théorème de plongement de Kodaira [C22, Ch.1] [C23, Ch.0] [C25, Ch.5]
Positivité(s) et amplitude d'un fibré en droites. Notion d'éclatement le long d'une sous-variété. Théorème de Riemann-Roch. Caractérisation des variétés kählériennes projectives (et algébriques par Chow).

III - Théorème de Calabi-Yau [C24, Ch.5] [C26]

Lemme du $\partial\bar{\partial}$ en bidegré $(1,1)$, espace des métriques au sein d'une classe fixée. Réduction du problème *via* le lemme du $\partial\bar{\partial}$. Méthode de continuité. Argument d'ouverture ; argument de fermeture : estimées *a priori*.

IV - Métriques de Kähler-Einstein [C18] [C19] [C21] [C26]
Distinction des trois cas, résolution du cas canoniquement ample (Aubin, Yau). Cas Fano : énoncé d'unicité (Bando-Mabuchi), lien avec la stabilité (conjecture de Yau-Tian-Donaldson).

Remerciements

La rédaction de ces sujets aurait été impossible sans l'aide de plusieurs personnes. En particulier, les idées apportées par Serge Cantat et Charles Favre ont été essentielles dans la conception du second thème (temps de récurrences linéaires, analyse complexe et p-adique).

Références

Théorie ergodique et approximation diophantienne

[A1] A.S. Besicovitch, Sets of fractional dimensions (IV) : On rational approximation to real numbers. *Journal of the London Mathematical Society*, s1-9 (1934), no. 2, 126– 131.

[A2] J.W.S. Cassels, *An introduction to Diophantine approximation.* Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, Vol. 45, Cambridge University Press (1957).

[A3] T.W. Cusick et M.E. Flahive, *The Markoff and Lagrange spectra.* Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 30, American Mathematical Society (1989).

[A4] F. Dal'Bo, *Trajectoire géodésiques et horocycliques.* Savoirs Actuels, EDP Sciences, CNRS Éditions (2007).

[A5] M. Einsiedler et T. Ward, *Ergodic theory with a view towards number theory.* Graduate Texts in Mathematics, Vol. 259, Springer Verlag (2011).

[A6] C. Series, The geometry of Markoff numbers. *The Mathematical Intelligencer*, 7 (1985), no. 3, 20–29.

[A7] C. Series, The modular surface and continued fractions. *Journal of the London Mathematical Society (2)*, 31 (1985), no. 1, 69–80.

[A8] V. Sprindžuk, *Metric theory of Diophantine approximations.* Scripta Series in Mathematics. V. H. Winston & Sons (1979).

Temps de récurrences linéaires

[B9] J.P. Bell, A generalised Skolem-Mahler-Lech theorem for affine varieties. *Journal of the London Mathematical Society (2)*, Vol. 73 (2006), no. 2, 367–379.

[B10] J.P. Bell, D. Ghioca et T.J. Tucker, The dynamical Mordell-Lang problem for étale maps. *American Journal of Mathematics*, Vol. 132 (2010), no. 6, 1655–1675.

[B11] L. Carleson et T.W. Gamelin, *Complex dynamics.* Universitext : Tracts in Mathematics, Springer Verlag (1993).

[B12] J.W.S. Cassels, *Local fields.* London Mathematical Society Student Texts, Vol. 3, Cambridge University Press (1986).

[B13] M. Herman et J.-C. Yoccoz, Generalizations of some theorems of small divisors to non-Archimedean fields. In *Geometric dynamics (Rio de Janeiro, 1981)*, 408–447, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1007, Springer (1983).

[B14] J. Milnor, *Dynamics in one complex variable.* Annals of Mathematics Studies, Vol. 160, Princeton University Press (2006).

[B15] B. Nica, Linear groups - Malcev's theorem and Selberg's lemma. Version du 10 juin 2013, Arxiv (`http://arxiv.org/abs/1306.2385`).

[B16] B. Poonen, p-adic interpolation of iterates. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 46 (2014), no. 3, 525– 527.

[B17] A. Robert, *A course in p-adic analysis.* Graduate Texts in Mathematics, Vol. 198, Springer Verlag (2000).

Géométrie källhérienne

[C18] T. Aubin, Équations du type Monge-Ampère sur les variétés kählériennes compactes. *Bulletin des Sciences Mathématiques (2)*, 102 (1978), no. 1, 63–95.

[C19] S. Bando et T. Mabuchi, Uniqueness of Einstein Kähler metrics modulo connected group actions. In *Algebraic geometry, Sendai, 1985*, 11–40. *Advanced Studies in Pure Mathematics*, Vol. 10, North-Holland, Amsterdam (1987).

[C20] A.L. Besse, *Einstein manifolds.* Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin (2008). Reprint of the 1987 edition.

[C21] O. Biquard, Métriques kählériennes à courbure scalaire constante : unicité, stabilité. Séminaire Bourbaki, Vol. 2004/2005, Exposé no. 938. *Astérisque*, 307 (2006), vii, 1–31.

[C22] J. Fine, A rapid introduction to Kähler geometry. Notes de cours pour la Ricci Summer School, `http://homepages.vub.ac.be/~joelfine/papers.html`, 2013.

[C23] P. Griffiths et J. Harris, *Principles of algebraic geometry.* Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York (1994). Reprint of the 1978 original.

[C24] D.D. Joyce, *Compact manifolds with special holonomy.* Oxford Mathematical Monographs. Oxford University Press, Oxford (2000).

[C25] X. Ma et G. Marinescu, *Holomorphic Morse inequalities and Bergman kernels. Progress in Mathematics*, Vol. 254. Birkhäuser Verlag, Basel (2007).

[C26] S.-T. Yau, On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation. I. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 31 (1978), no. 3, 339–411.