Master MFA, 1re année, 2e semestre — *Année 2014/2015*

GÉOMÉTRIE

A. CHAMBERT-LOIR

Partiel du 16 mars 2015 (3h)

Les notes de cours, téléphones portables, ordinateur, les conseils des voisins, etc. ne sont pas autorisés pendant l'épreuve. Justifiez s'il vous plaît toutes vos réponses par une preuve ou par une référence à un théorème discuté en cours. Il est toujours possible de sauter des questions que vous ne parvenez pas à résoudre, quitte à y a revenir après coup.

EXERCICE 1

Soit S l'ensemble des $(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$ tels que $x^2+y^2+z^2=1$ et C l'ensemble des $(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$ tels que $x^2+y^2-x=0$. On pose $A=S\cap C$.

1 Démontrer que S et C sont des sous-variétés fermées de $\mathbf{R}^3$. Faire un dessin.

2 Soit $f\colon \mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^2$ l'application donnée par

$$f(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2-1,x^2+y^2-x).$$

Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$; calculer sa différentielle.

3 Pour $m\in\mathbf{N}$, déterminer l'ensemble A_m des points $a\in A$ tels que D_af soit de rang m.

4 Quels sont les points de A dont un voisinage dans A est une sous-variété de $\mathbf{R}^3$? une variété topologique ?

EXERCICE 2

Soit $M\subset\mathbf{R}^m$ et $N\subset\mathbf{R}^n$ des sous-variétés et soit $f\colon M\to N$ une application de classe $\mathscr{C}^p$ $(p\geqslant 1)$.

1 Soit $a\in M$ tel que $T_af\colon T_aM\to T_{f(a)}N$ soit un isomorphisme. Démontrer qu'il existe un voisinage U de a dans M et un voisinage V de $f(a)$ dans N tels que f induise un homéomorphisme de U sur V, et que la bijection réciproque est de classe $\mathscr{C}^p$.

2 On suppose désormais que M est compacte, non vide, que N est connexe, et que T_af est un isomorphisme pour tout $a\in M$.

a) Démontrer que $f(M)=N$.

b) Démontrer que pour tout $b\in N$, $f^{-1}(b)$ est un ensemble fini.

c) Démontrer que $f\colon M\to N$ est un revêtement.

EXERCICE 3

Soit M une sous-variété de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbf{R}^{n+1}$. On suppose que $0\in M$ et que T_0M est l'hyperplan d'équation $x_{n+1}=0$.

1 Démontrer qu'il existe un voisinage U de 0 dans $\mathbf{R}^n$, un voisinage V de 0 dans $\mathbf{R}^{n+1}$ et une application $f\colon U\to\mathbf{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que $M\cap V$ soit l'ensemble des points $(x_1,\dots,x_{n+1})$ tels que $(x_1,\dots,x_n)\in U$ et $x_{n+1}=f(x_1,\dots,x_n)$.

2 Quelle est la différentielle de f en 0 ?

3 Faire des dessins lorsque $n=2$ et $f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2$ et $x_1^2-x_2^2$.

4 Soit $Q=D_0^2f$ la différentielle seconde de f en 0, qu'on identifie à la matrice symétrique $(\partial^2f/\partial x_i\partial x_j(0))$ des dérivées partielles secondes en 0.

Si Q est définie positive, démontrer que f admet un minimum local strict en 0. Quelle est la position de M par rapport à T_0M au voisinage de 0 ?

5 On suppose que Q est de signature $(p, n-p)$, où $0 < p < n$. Démontrer qu'il existe un voisinage V' de 0 contenu dans V tel que $(M \cap T_0M) \cap (V' \setminus \{0\})$ soit une sous-variété de dimension $n-1$. Est-ce que $(M \cap T_0M) \cap V'$ est une sous-variété ?

EXERCICE 4

Soit n un entier, soit $\mathrm{U}(n)$ l'ensemble des matrices unitaires de taille $n \times n$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ telles que ${}^{\mathrm{t}}\overline{A} \cdot A = \mathrm{I}_n$.

1 Démontrer que $\mathrm{U}(n)$ est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$.

2 On identifie $\mathbf{C}$ à $\mathbf{R}^2$ et $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ à $\mathbf{R}^{2n^2}$. Démontrer que $\mathrm{U}(n)$ est une sous-variété fermée de $\mathbf{R}^{2n^2}$, de dimension n^2. Déterminer son espace tangent en l'origine et vérifier qu'il est stable par le crochet de Lie $(A, B) \mapsto [A, B] = AB - BA$.

3 Démontrer que $\mathrm{SU}(n) = \mathrm{U}(n) \cap \mathrm{SL}(n, \mathbf{C})$ est une sous-variété de dimension $n^2 - 1$ de $\mathbf{R}^{2n^2}$. Déterminer son espace tangent à l'origine et vérifier qu'il est stable par le crochet de Lie.

4 Démontrer que $\mathrm{SU}(2)$ est difféomorphe à la sphère S_3 de $\mathbf{R}^4$. (Considérer par exemple l'application de $\mathrm{SU}(2)$ dans $\mathbf{C}^2$ qui applique une matrice sur sa première ligne.)