TD 03 : Variétés et sous-variétés

1. **CARACTÉRISATION DES SOUS-VARIÉTÉS**

   Soit $n \geq 1$, et soit M une partie non vide de $\mathbb{R}^n$. Soit $p \leq n$ un entier, et soit $k \in (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \cup \{\infty\}$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

   (a) M est une sous-variété sans bord de $\mathbb{R}^n$ de dimension p et de régularité $\mathcal{C}^k$.
   (b) Pour tout $a \in M$, il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant a et une submersion $g \in \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^{n-p})$ telle que $M \cap U = g^{-1}(\{0\})$.
   (c) Pour tout $a \in M$, il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant a, un ouvert V de $\mathbb{R}^p$ contenant 0, et une immersion $h \in \mathcal{C}^k(V, U)$ qui est un homéomorphisme de V sur $M \cap U$.
   (d) Pour tout $a \in M$, quitte à permuter les coordonnées, il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant a, un ouvert V de $\mathbb{R}^p$ contenant $(a_1, \ldots, a_p)$ et une application $g \in \mathcal{C}^k(V, \mathbb{R}^{n-p})$ telle que $M \cap U$ coïncide avec le graphe de g.

2. **(CONTRE-)EXEMPLES DE SOUS-VARIÉTÉS**

   Parmi les ensembles ci-dessous, lesquels sont des sous-variétés de $\mathbb{R}^n$? Quelle est leur classe de différentiabilité ?

   (a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1\}$;
   (b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et $x^2 + y^2 - x = 0\}$;
   (c) $\{(t, t^2) : t \leq 0\} \cup \{(t, -t^2) : t \geq 0\}$;
   (d) $\{(t^2, t^3) : t \in \mathbb{R}\}$.

3. **SOUS-VARIÉTÉ ET ADHÉRENCE**

   Soit $n \geq 2$. On identifie $\mathbb{R}_n[X]$ à $\mathbb{R}^{n+1}$ en écrivant les polynômes dans la base $\{1, X, \ldots, X^n\}$. Soit E l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ qui ont une unique racine de multiplicité n.

   (a) Montrer que E est une sous-variété $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}_n[X]$. Calculer sa dimension.
   (b) Expliciter $\overline{E}$.
   (c) En étudiant l'espace tangent en 0, montrer que $\overline{E}$ n'est pas une sous-variété $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (d) On suppose que n est pair. Montrer que $\overline{E}$ n'est pas une variété topologique.

4. **ACTION MULTIPLEMENT TRANSITIVE DU GROUPE DES DIFFÉOMORPHISMES**

   Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Soit M une variété connexe de classe $\mathcal{C}^k$. On note $\text{Diffeo}^k(M)$ le groupe des $\mathcal{C}^k$-difféomorphismes de M (ou homéomorphismes si $k = 0$). Pour tous x et y dans M, on note $x \sim y$ s'il existe $\varphi \in \text{Diffeo}^k(M)$ tel que $\varphi(x) = y$.

   (a) Montrer que $\sim$ est une relation déquivalence sur M donc les classes sont ouvertes.
   (b) En déduire que $\text{Diffeo}^k(M)$ agit transitivement sur M.
   (c) On suppose que $\dim(M) \geq 2$. Soit $\Sigma \subset M$ un ensemble fini. Montrer que le sous-groupe des $\mathcal{C}^k$-difféomorphismes de M qui fixent Σ agit transitivement sur $M \setminus \Sigma$.
   (d) En déduire que, si $\dim(M) \geq 2$, alors $\text{Diffeo}^k(M)$ agit N-transitivement sur M pour tout $N \geq 1$.
   (e) Que se passe-t-il si $\dim(M) = 1$?

5. **ESPACES PROJECTIFS**

   Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, et $n \geq 1$. On définit une relation d'equivalence $\sim$ sur $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ par $x \sim y$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x = \lambda y$. On note $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$, et on appelle *espace projectif réel (resp. complexe) de dimension* n, l'espace topologique quotient.

   (a) Montrer que $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ est une variété topologique dont on spécifiera la dimension réelle.
   (b) Montrer que $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ est compact.
   (c) Montrer que $\mathbb{P}_1(\mathbb{K})$ est homéomorphe au compactifié d'Alexandroff de $\mathbb{K}$.
   (d) On définit une relation déquivalence $\sim'$ sur $\mathbb{S}_n$ par $x \sim' -x$ pour tout x. Montrer que $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{S}_{n/\sim'}$ sont homéomorphes.
   (e) Montrer que $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ est homéomorphe à la boule unité fermée dont on a quotienté le bord par la relation $x \sim'' -x$.
   (f) Soit $f : \mathbb{S}_2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$. Décrire les variétés $\{f \geq 0\}$ et $\{f \leq 0\}$.
   (g) Montrer que f passe au quotient en une fonction $\tilde{f} : \mathbb{P}_2(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}$.
   (h) Décrire les variétés $\{\tilde{f} \geq 0\}$ et $\{\tilde{f} \leq 0\}$. En déduire que $\mathbb{P}_2(\mathbb{K})$ est homéomorphe au recollement de deux variétés à bord que l'on explicitera.

6. **COURBES ELLIPTIQUES**

   Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, posons $H(a, b) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = x^3 + ax + b\}$. On définit le *discriminant* comme étant la quantité $\Delta(a, b) := -16(4a^3 + 27b^2)$.

   (a) Montrer que si $\Delta(a, b) \neq 0$, alors $H(a, b)$ est une sous-variété $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^2$.
   (b) Supposons que $\Delta(a, b) = 0$. Pour quelles valeurs de (a, b) la courbe $H(a, b)$ est-elle une sous-variété de $\mathbb{R}^2$? Quel est sa régularité ?

(c) Pour quelles valeurs de (a, b) le sous-ensemble $H(a, b)$ est-il connexe ?
(d) Dessiner l'allure de $H(-1, b)$ en fonction de b.

7. **Quelques groupes de Lie et espaces homogènes**

Soient $1 \leq p, k \leq n$ des entiers. On note $M_{n,k}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à coefficents réels, à n lignes et à k colonnes. On sait que $M_{n,k}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{nk}$. De plus, on distingue dans $M_{n,n}(\mathbb{R})$ les matrices suivantes :
- I_n est la matrice identité ;
- pour tout $p \in [\![0, n]\!]$,

$$I_{p,n-p} := \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix};$$

- Pour tout $n \geq 1$:

$$J_n := \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que les ensembles suivants, vus comme sous-ensembles de $\mathbb{R}^{nk}$, sont des sous-variétés $\mathcal{C}^\infty$. Calculer leur dimension. Expliciter leur espace tangent en I_n quand c'est possible. Déterminer si ces variétés sont compactes.

(a) $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \ : \ \det(A) \neq 0\}$;
(b) $SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \ : \ \det(A) = 1\}$;
(c) $O(p, n-p) = \{A \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \ : \ {}^tAI_{p,n-p}A = I_{p,n-p}\}$ [1] ;
(d) $Sp_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_{2n,2n}(\mathbb{R}) \ : \ {}^tAJ_nA = J_n\}$ [2] ;
(e) $V_{n,k}(\mathbb{R}) = \{A \in M_{n,k}(\mathbb{R}) \ : \ {}^tAA = I_k\}$ [3].

On note $O(n) = O(n, 0)$. Pour finir, on s'intéresse de plus près aux variétés de Siefel. À n fixé, pour tous $1 \leq \ell \leq k \leq n$, on note $\pi_{k,\ell} : V_{n,k} \to V_{n,\ell}$ l'application qui consiste à ne conserver que les ℓ premières colonnes.

(f) À quels espaces correspondent $V_{n,1}(\mathbb{R})$ et $V_{n,n}(\mathbb{R})$?
(g) Montrer que, pour tout $x \in V_{n,\ell}(\mathbb{R})$, l'espace $\pi_{k,\ell}^{-1}(x)$ est une sous-variété homéomorphe à $V_{n-\ell,k-\ell}(\mathbb{R})$.

8. **Surfaces plates à singularités**

Soit $n \geq 2$ un entier. Soit $P(n)$ l'enveloppe convexe des racines $2n$-ièmes de l'unité dans le plan complexe ; c'est un polygone régulier à $2n$ côtés. On recolle les côtés de deux façons différentes, en utilisant deux relations d'équivalence :
– La relation $\sim_{1,n}$ engendrée par $x \sim_1 -x$ pour tous x dans $\partial P(n)$;
– La relation $\sim_{2,n}$ engendrée par :

$$te^{i\frac{k\pi}{2n}} + (1-t)e^{i\frac{(k+1)\pi}{2n}} \sim_2 -(1-t)e^{i\frac{k\pi}{2n}} - te^{i\frac{(k+1)\pi}{2n}} \quad \forall t \in [0, 1], \ \ \forall k \in [\![0, n-1]\!].$$

On note $\Sigma_1(n) := P(n)_{/\sim_{1,n}}$ et $\Sigma_2(n) := P(n)_{/\sim_{2,n}}$.

(a) Montrer que $\Sigma_1(n)$ est homéomorphe au plan projectif $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ pour tout $n \geq 2$. On pourra utiliser le résultat de la question 5.(e).
(b) Montrer que $\Sigma_2(n)$ est une variété topologique pour tout $n \geq 2$. On fera attention à distinguer selon la parité de n.
(c) Quelle est la variété $\Sigma_2(2)$? Montrer que $\Sigma_2(2)$ et $\Sigma_2(3)$ sont homéomorphes.

Les variétés $\Sigma_2(n)$ ont naturellement une structure de *surface plate avec singularités*. Pour de telles surfaces, il existe un notion de courbure $\kappa(x)$ en un point x. Soit $S(x, \varepsilon)$ le cercle centré en x et de rayon $\varepsilon > 0$. Alors :

$$\kappa(x) = 2\pi - \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{|S(x, \varepsilon)|}{\varepsilon}.$$

Les singularités de Σ sont les points en lesquels κ est non nul. La *caractéristique d'Euler* d'une surface plate avec singularités Σ vaut alors, en accord avec le théorème de Gauss-Bonnet,

$$\chi(\Sigma) = \frac{1}{2\pi} \sum_{x \in \Sigma} \kappa(x).$$

(d) Calculer $\chi(\Sigma_1(n))$ et $\chi(\Sigma_2(n))$ pour tout $n \geq 2$.
(e) Calculer la caractéristique d'Euler de la bouteille de Klein.

1. Pour $p = 0$, il s'agit des groupes orthogonaux.
2. Il s'agit des groupes symplectiques.
3. Ces ensembles sont aussi appelés variétés de Siefel.