TD 4
Lois continues, lois marginales, lois conditionnelles

1. La durée de vie d'un composant électronique, notée T, est une variable aléatoire. On suppose qu'elle suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, c'est-à-dire qu'elle est de densité $\lambda e^{-\lambda x} 1_{[0,+\infty)}(x)$.
   (a) On sait que 1% des composants ont une durée de vie inférieure à 120 heures et 36 minutes. Déterminez la durée de vie moyenne, en heures, d'une composant.
   (b) Trouvez le réel t tel que 80% des composants ont une durée de vie supérieure à t.

2. Soit X une variable aléatoire dont la loi admet une densité f sur $\mathbb{R}$. On suppose que f est symétrique par rapport à un certain réel m, c'est-à-dire que $f(m+x) = f(m-x)$ pour tout réel x. On suppose de plus que $\mathbb{E}(|X|) < +\infty$. Montrez que $\mathbb{E}(X) = m$.

3. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre 1. Calculez la fonction de répartition de $\min\{X, 1/X\}$.

4. Quelle est la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui vaut π avec probabilité 1 ?

5. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[-2, 2]$.
   (a) Calculez la densité, la fonction de répartition, l'espérance et la variance de X.
   (b) Faites de même avec X^2.

6. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. On pose $Y := e^X$.
   (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculez le moment d'ordre k de Y.
   (b) Calculez la densité de Y.

7. Pour tout réel α, on définit une fonction p_α par $p_\alpha(x) := \alpha x^{\alpha-1} 1_{(0,1)}(x)$ pour tout réel x.
   (a) Pour quelles valeurs du paramètre α la fonction p_α est-elle une densité de probabilité ?
   (b) Soit α un tel paramètre. Soit X une variable aléatoire dont la loi est de densité p_α. On pose $Y := -\alpha \ln(X)$. Calculez la densité de Y, et montrez qu'elle ne dépend pas de α.

8. Le temps de fonctionnement d'un appareil est une variable aléatoire T ; on suppose que sa loi a une densité f continue sur $\mathbb{R}_+$. Soit F la fonction de répartition associée. Le *taux de défaillance* est la fonction λ valant $\lambda(t) := \frac{f(t)}{1-F(t)}$ si $F(t) < 1$, et 0 sinon. Montrez que, pour tout $t \geq 0$:
$$\lambda(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \mathbb{P}(T \in (t, t+h] | T > t).$$
   On définit, pour tout $t \geq 0$, le *taux de défaillance cumulé* Γ par :
$$\Gamma(t) := \int_0^t \lambda(s) \, \mathrm{d}s.$$
   En général, expérimentalement, la fonction $\ln(\Gamma(t))$ est une fonction affine de $\ln(t)$.
   (a) Montrez qu'il existe des paramètres α et β strictement positifs tels que $\Gamma(t) = (t/\alpha)^\beta$. En déduire le taux de défaillance en fonction du temps.
   (b) Dérivez $\lambda^{-1} = \frac{1-F}{f}$. Trouvez une équation différentielle que vérifie f.
   (c) Résolvez cette équation différentielle. Déduisez-en qu'il existe une constante $C > 0$ telle que :
$$f(t) = C t^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta} 1_{t \geq 0}.$$
   (d) Calculez la constante C [1].
   (e) Qualitativement, quelle est la différence entre le cas $\beta \in (0, 1)$ et le cas $\beta > 1$?

9. On note λ_2 la mesure de Lebesgue sur le plan. Calculez, dans les trois cas suivant, l'intégrale double $\int_D f(x, y) \, \mathrm{d}\lambda_2(x, y)$:
   (a) $D = [1, 2] \times [0, 3]$ et $f(x, y) = xy + y^2 - 1$.
   (b) $D = [1, 2] \times [0, 2]$ et $f(x, y) = y e^{xy}$.
   (c) $D = \{(x, y) \in [0, 1]^2 \ : \ x > y\}$ et $f(x, y) = (x - 2y)^2$.

1. On dit que T suit une loi de Weibull de paramètres (α, β).

10. **Calcul de** $\mathbb{P}(X = Y)$
Soient X et Y deux variables aléatoires rélles indépendantes. On suppose que la loi de X est à densité.
    (a) Montrez que, pour tout réel a, on a $\mathbb{P}(X = a) = 0$.
    (b) Déduisez-en, en utilisant le théorème de Fubini, que $\mathbb{P}(X = Y) = 0$.
    (c) Si X et Y ont la même loi, que peut-on dire de $\mathbb{P}(X > Y)$?

11. Deux personnes se sont donné rendez-vous entre 14h et 15h. Ne se souvent plus de l'heure précise, chacune décide d'arriver à un moment au hasard uniforme entre 14h et 15h. Les deux décisions sont indépendantes. Quelle est la probabilité que la personne arrivant le plus tôt ait à attendre moins d'un quart d'heure ?

12. Dans ce qui suit, X et Y sont deux variables aléatoires réelles indépendantes. Dans chacun des cas suivants, calculez la densité de la loi de $X + Y$ dans le cas continu, ou décrivez la loi de $X + Y$ dans le cas discret.
    (a) X et Y ont la même loi que Z^2, où Z suit une loi normale normale $\mathcal{N}(0, 1)$. [2].
    (b) X et Y suivent une loi uniforme sur $[0, 1]$.
    (c) X suit une loi géométrique de paramètre $p \in (0, 1)$, et Y suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

13. Soit $n \geq 1$. Soient $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. On note F la fonction de répartition de X_1. On pose $X^{(1)} := \min_{1 \leq k \leq n} X_k$, et $X^{(n)} := \max_{1 \leq k \leq n} X_k$.
    (a) Calculez les fonctions de répartition de $X^{(1)}$ et $X^{(n)}$ en fonction de F.
    (b) Si la loi des X_k a une densité f, exprimez les densités de $X^{(1)}$ et $X^{(n)}$ en fonction de f.
    (c) Faites les calculs quand les X_k suivent une loi uniforme sur $[0, 1]$, et quand elles suivent une loi exponentielle.

14. Soit (X, Y) une couple de variables aléatoires réelles, dont la loi a pour densité $yx^{y-1}e^{-y}1_{[0,1]}(x)1_{[0,+\infty)}(y)$.
    (a) Dessinez le domaine du plan dans lequel (X, Y) prend ses valeurs.
    (b) Calculez la loi de Y [3].
    (c) Calculez $\mathbb{E}(X(Y + 1))$.

15. Soit (X, Y) une couple de variables aléatoires réelles, dont la loi a pour densité $ke^{-y}1_{0<x<y}$, où k est un réel.
    (a) Dessinez le domaine du plan dans lequel (X, Y) prend ses valeurs.
    (b) Calculez k.
    (c) Calculez les densités marginales de (X, y), c'est-à-dire la densité de la loi de X et celle de Y.
    (d) Déterminez la loi de $T := Y - X$.

16. Soit (X, Y) une couple de variables aléatoires réelles, dont la loi a pour densité $\pi^{-1}1_{x^2+y^2\leq 1}$.
    (a) Pour tout réel λ, calculez graphiquement $\mathbb{P}(X > \lambda Y)$.
    (b) Calculez graphiquement $\mathbb{P}(X > 1/\sqrt{2})$.

17. Soit $\lambda > 0$. Soit (X, Y) une couple de variables aléatoires réelles, dont la loi a pour densité $\lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}1_{[0,+\infty)}(x)1_{[0,+\infty)}(y)$.
    (a) Que peut-on dire des variables aléatoires X et Y ?
    (b) Calculez la loi du couple $(X + Y, X - Y)$.

18. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, qui suivent toutes deux une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$. Montrez que $\frac{X}{Y}$ Suit une loi de Cauchy.

19. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, qui suivent une loi exponentielle de paramètres respectifs α et β. On pose $S := \min\{X, Y\}$ et $T := |X - Y|$.
    (a) Calculez la loi du couple (S, T).
    (b) Les variables aléatoires S et T sont-elles indépendantes ?

20. Soit (X, Y) une couple de variables aléatoires réelles, dont la loi a pour densité $k1_{0<x}1_{0<y}1_{x+y<1}$, où k est un réel.
    (a) Dessinez le domaine du plan dans lequel (X, Y) prend ses valeurs.
    (b) Calculez k.

2. On dit que X et Y suivent une loi du χ^2 à un degré de liberté. Une densité de cette loi est donnée par la fonction $\frac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^{-\frac{x}{2}}1_{[0,+\infty)}(x)$.
3. On parle de loi marginale.

(c) Décrivez la loi de Y sachant X [4].
(d) Décrivez la loi de X.

21. Soit (X, Y) une couple de variables aléatoires réelles, dont la loi a pour densité $yx^{y-1}e^{-y}1_{[0,1]}(x)1_{[0,+\infty)}(y)$. Calculez $\mathbb{P}(X \leq x|Y)$ pour tout réel x.

22. **SIMULATION PAR LA MÉTHODE DU REJET**
Soient f et g deux densités de probabilité, telles qu'il existe $M > 0$ tel que $f \leq Mg$. On suppose que l'on peut simuler facilement une variable aléatoire dont la loi a pour densité g. On cherche à simuler une variable aléatoire X dont la loi a pour densité f. Pour cela, on utilise la méthode du rejet. L'algorithme est le suivant :
(a) On simule une variable aléatoire Y suivant une loi de densité g.
(b) On simule une variable aléatoire U suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$.
(c) On pose $X := V$ si $MUg(V) \leq f(V)$. Sinon, on recommence au début.

Formellement, on se donne deux suites indépendantes de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées $(Y_n)_{n\geq 1}$ et $(U_n)_{n\geq 1}$, telles que Y_0 suive une loi de densité g et U_0 suive une loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose :

$$T := \inf\{n \geq 1 \ : \ MU_n g(Y_n) \leq f(Y_n)\}.$$

Ainsi, T est le nombre (aléatoire) d'itérations de la boucle dans l'algorithme.
(a) Montrez que T suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{M}$.
(b) On pose $X := Y_T$. Montrez que X suit une loi de densité f.

---

4. On parle de loi conditionnelle.