TD 2
Probabilité conditionnelle et variables aléatoires

Indépendance et probabilités conditionnelles

1. **PROBABILITÉ DE PANNE D'UN CIRCUIT**
   On reprend le circuit de l'exercice 4 du premier TD : Supposons que les fusibles a, b_1, b_2 et b_3 ont une même probabilité p de tomber en panne, et qu'ils sont indépendants les uns des autres. Quelle est la probabilité que le circuit ne laisse plus passer le courant de 1 à 2 ?

2. **FAMILLE D'ÉVÈNEMENTS INDÉPENDANTS, I**
   Soit Ω un espace probabilisé. Soit $n \geq 1$, et soit $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ une famille d'évènements.
   (a) Rappelez ce que l'on entend par "les évènements $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ sont indépendants".
   (b) Montrez que les évènements $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ sont indépendants si et seulement si pour tout $(\varepsilon_k)_{1\leq k\leq n} \in \{0,1\}^n$,
   $$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k^{\varepsilon_k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_k^{\varepsilon_k}\right),$$
   où $A_k^0 = A_k^c$ et $A_k^1 = A_k$.

3. **FAMILLE D'ÉVÈNEMENTS INDÉPENDANTS, II**
   On lance deux pièces équilibrées indépendamment l'une de l'autre. Soit X_1 (resp. X_2) la variable aléatoire qui vaut 1 si la première (resp. deuxième) pièce tombe sur pile, et 0 sinon. Posons $X_3 = X_1$ XOR X_2. Pour $k \in \{1,3\}$, on pose $A_k := \{X_k = 1\}$.
   (a) Montrez que les évènements A_1, A_2 et A_3 sont deux à deux indépendants.
   (b) Montrez que les évènements $(A_k)_{1\leq k\leq 3}$ ne sont pas indépendants.
   (c) Pour tout $n \geq 3$, construisez un espace probabilisé et une famille d'évènements $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ sur cet espace tels que toute sous-famille stricte d'évènements $(A_k)_{k\in I}$, avec $|I| \leq n-1$, soit indépendante, mais telle que $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ ne le soit pas.

4. **ÉVÈNEMENTS INDÉPENDANTS DANS $\mathbb{Z}_{/n\mathbb{Z}}$**
   On lance un dé à six faces non pipé. Soit X le résultat. Montrez que l'évènement $\{X \text{ est divisible par } 2\}$ est indépendant de l'évènement $\{X \text{ est divisible par } 3\}$.
   Nous allons généraliser ce résultat. Soit $n \geq 2$. On pose $\Omega_n := \{1, \cdots, n\}$, que l'on munit de la tribu discrète et de la loi uniforme. Pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$, soit A_k l'évènement $\{j : k \text{ divise } j\}$. Soit B l'évènement $\{j : n \text{ est premier avec } j\}$. Soient $(p_i)_{1\leq i\leq r}$ les facteurs premiers de n.
   (a) Soient A et B deux évènements non triviaux (ni vides, ni de complémentaire vide). Montrez que si n est premier, alors A et B ne sont pas indépendants.
   (b) Pour tout $i \in \{1, \cdots, r\}$, calculez la probabilité de l'évènement A_{p_i}.
   (c) Montrez que les évènements $(A_{p_i})_{1\leq i\leq r}$ sont indépendants.
   (d) Exprimez B en fonction des évènements $(A_{p_i})_{1\leq i\leq r}$.
   (e) Déduisez-en la probabilité de B.

5. **ÉVÈNEMENTS CORRÉLÉS**
   Soit Ω un espace probabilisé, et soient A et B deux évènements. On dit que A et B sont *positivement corrélés* si $\mathbb{P}(A \cap B) > \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, et *négativement corrélés* si $\mathbb{P}(A \cap B) < \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.
   Montrez que les si deux évènements A et B sont positivement corrélés, alors :
   (a) A^c et B^c sont positivement corrélés ;
   (b) A et B^c sont négativement corrélés.

   Soit X le résultat d'un lancer de dé à six faces non pipé. On pose $A := \{X \in \{2,3\}\}$, $B := \{X \in \{3,4\}\}$ et $C := \{X \in \{4,5\}\}$.
   (a) Montrez que les évènements A et B sont positivement corrélés, de même que les évènements B et C.
   (b) Montrez que les évènements A et C sont négativement corrélés.
   (c) Trouvez trois évènements A', B' et C' sur cet espace probabilisé tels que A' et B' soient indépendants, mais $\mathbb{P}(A' \cap B'|C') \neq \mathbb{P}(A'|C')\mathbb{P}(B'|C')$.

6. Le test ELISA, utilisé dans le dépistage du VIH, a une sensibilité de 97,3%, et une spécificité de 98,6% (Weiss et al., 1985). C'est-à-dire que, dans de bonnes conditions, une personne contaminée est identifiée correctement 97,3% du temps, et une personne saine est identifiée correctement 98,6% du temps. On dit aussi que la sensibilité du test est de 97,3%, et que sa spécificité est de 98,6%.
   En 2012, on estimait à 150 000 le nombre de personnes porteuses du VIH en France, sur une population de 65,7 millions de personnes.
   (a) On prend une personne au hasard en France, et on applique le test ELISA. Le test est positif. Quelle est la probabilité que la personne soit infectée ?
   (b) Discutez la réponse précédente en fonction de la sensibilité et de la spécificité du test.
   (c) On veut améliorer la spécificité en pratiquant un deuxième test. Une personne est alors considérée séropositive si elle est positive aux deux tests. Vaut-il mieux utiliser le même test, ou un test différent (quitte à ce que la spécificité du second test soit moindre) ?

7. Lors d'une partie de pile ou face, vous suspectez que votre adversaire est un tricheur. S'il l'est, il ne vous laissera aucune chance, et gagnera à coup sûr ! Votre adversaire parie sur face et lance une pièce. Celle-ci tombe sur face. Pouvez-vous calculer la probabilité que votre adversaire triche ?

Opérations sur les tribus

8. Si $A, B \in \mathcal{F}$, où $\mathcal{F}$ une tribu, montrez que $A \cap B$, $A \setminus B$ et $A \triangle B$ sont aussi éléments de la tribu.

9. Soit $\mathcal{F}$ une tribu sur Ω et soit $B \in \mathcal{F}$. Montrez que $\mathcal{F}_{B|} := \{A \cap B : A \in \mathcal{F}\}$ est une tribu sur B.

10. Soit $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ une famille de tribus sur Ω avec $I \neq \emptyset$ (pas nécessairement dénombrable). Montrez que $\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ est une tribu sur Ω.

11. Soit Ω un ensemble dénombrable et $\mathcal{G} := \{\{\omega\}, \omega \in \Omega\}$ la famille des singletons. Déterminez la tribu $\sigma(\mathcal{G}) := \sigma_\Omega(\mathcal{G})$.

12. Soient $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ deux ensembles (non-vides), $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ une application et $\mathcal{Y}$ une tribu sur $\mathbb{Y}$. Montrez que :
    (a) $f^{-1}(\mathcal{Y})$ est une tribu sur $\mathbb{X}$;
    (b) $f^{-1}(\mathcal{Y}) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{G}))$ pour toute famille génératrice $\mathcal{G}$ de $\mathcal{Y}$.

Variables aléatoires

13. **Mesurabilité d'une variable aléatoire discrète**
    Soient $\Omega = \{0,1\}^3$ et $\mathbb{X} = \{0,1,2,3\}$. On définit :
    $$X := \left\{ \begin{array}{lcl} \Omega & \to & \mathbb{X} \\ (\omega_1, \omega_2, \omega_3) & \mapsto & \sum_{i=1}^3 \omega_i \end{array} \right. .$$
    (a) On munit $\mathbb{X}$ de la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{X})$. On pose $A := \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$ et on munit Ω de la tribu $\{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$. L'application X est-elle une variable aléatoire ?
    (b) Pouvez-vous déterminer une tribu $\mathcal{F}$ sur Ω strictement plus petite que $\mathcal{P}(\Omega)$ et pour laquelle X est une variable aléatoire ?

14. **Mesurabilité des fonctions continues**
    Soient $(\Omega, \mathcal{F})$ et $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$ des espaces probabilisés, $\mathcal{G}$ une famille génératrice de la tribu $\mathcal{X}$ (i.e. $\sigma_{\mathbb{X}}(\mathcal{G}) = \mathcal{X}$) et $X : \Omega \to \mathbb{X}$ une application.
    (a) Montrez que X est une variable aléatoire si et seulement si $X^{-1}(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{F}$.
    (b) Supposons que $\Omega = \mathbb{R}^n$ et $\mathbb{X} = \mathbb{R}$, munis de leurs tribus boréliennes respectives. Si X est une application continue, est-elle une variable aléatoire ?

15. **Opérations sur les variables aléatoires**
    Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace d'évènements et $X, Y, (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des variables aléatoires réelles. Montrez que :
    (a) les évènements $\{X < Y\}$, $\{X \leq Y\}$, $\{X = Y\}$ et $\{X \neq Y\}$ appartiennent tous à la tribu $\mathcal{F}$;
    (b) $X + Y$ et XY sont des variables aléatoires ;
    (c) $\sup_n X_n$ et $\inf_n X_n$, $\limsup_n X_n$ et $\liminf_n X_n$ sont des variables aléatoires sur $\overline{\mathbb{R}}$;
    (d) les sous-ensembles $\{\lim_n X_n \text{ existe}\}$ et $\{\lim_n X_n = X\}$ appartiennent à la tribu $\mathcal{F}$.