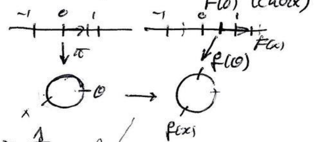
Conjugaison sur le cercle,
4 Pb du "petit diviseur"

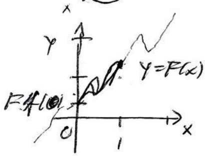
$S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ $\quad \pi : \mathbb{R} \to S^1$

$f : S^1 \xrightarrow{C^0} S^1$

$\exists$ relevé $F : \mathbb{R} \xrightarrow{C^0} \mathbb{R}$ tq

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{F} & \mathbb{R} \\ \pi \downarrow & \circlearrowright & \downarrow \pi \\ \mathbb{R}/\mathbb{Z} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}/\mathbb{Z} \end{array}$$





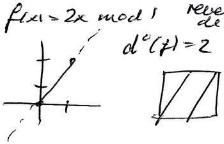
Lemme 1 Soit F un relevé de $f \in C^0(S^1; S^1)$. Alors $d = F(1) - F(0) \in \mathbb{Z}$ et ne dépend pas du choix de relevés. On a $\forall x \in \mathbb{R}$

$$F(x+1) = F(x) + d.$$

---

ex $f(x) = 2x \bmod 1$ revêtement de d°2

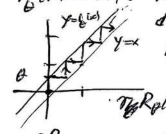
$d^\circ(f) = 2$



ex $r_\theta(x) = x + \theta \bmod 1$

$d^\circ(r_\theta) = +1$

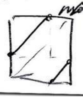
$r_\theta \in \mathrm{homeo}_+(S^1)$



$R_\theta(x) = x + \theta + m$ $\quad m \in \mathbb{Z}$

$R_\theta^n(x) = x + n\theta + nm$

$\frac{1}{n}(R_\theta^n(x) - x) = \theta + m \equiv \theta \bmod \mathbb{Z}$



$d(f) = +1$ ✓

Thm 2 Soit $f \in \mathrm{homeo}_+(S^1)$ et $F : \mathbb{R} \xrightarrow{C^0} \mathbb{R}$ un relevé. Alors,

$$\tau(f) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n}(F^n(x) - x) \bmod \mathbb{Z}$$

existe. La lim. ne dépend pas de x, ni du choix de relevé (mod $\mathbb{Z}$)

---

dem Définir les incréments :

$\Delta(x) = F(x) - x$, $\quad \Delta_n(x) = F^n(x) - x$

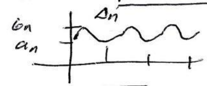
$\Delta_n(x+1) = F^n(x+1) - (x+1)$
$\quad = F^n(x) + 1 - (x+1) = \Delta_n(x)$

Δ_n est 1-périodique

$x \le y < x+1 \Rightarrow F^n(x) \le F^n(y) < F^n(x+1)$

$\Rightarrow \Delta_n(x) - 1 < \Delta_n(y) < \Delta_n(x) + 1$

ou bien $\boxed{|\Delta_n(y) - \Delta_n(x)| < 1 \quad \forall x, y}$

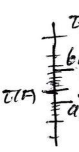


$b_n = \max \Delta_n$
$a_n = \min \Delta_n$

$\Delta_{n+m}(x) = F^{n+m}(x) - x$
$\quad = F^{n+m}(x) - F^m(x) + F^m(x) - x$
$\quad = \Delta_n \circ F^m + \Delta_m$

$\Delta_{n+m}(x) \le b_n + b_m \Rightarrow$
$b_{n+m} \le b_n + b_m$ sous-add
$a_{n+m} \ge a_n + a_m$ superadd

$$\tau(F) = \begin{cases} \lim_n \frac{1}{n} b_n = \inf_n \frac{1}{n} b_n \\ \lim_n \frac{1}{n} a_n = \sup_n \frac{1}{n} a_n \end{cases} \text{ car } 0 \le b_n - a_n < 1$$



Rmk : $a_n \le n\tau(F) \le b_n \quad \forall n$

$\lim_n \frac{1}{n}(\Delta_n(x)) \in [\sup \frac{1}{n} a_n, \inf \frac{1}{n} b_n]$
$\quad = \{\tau(F)\}$

$\tilde{F}(x) = F(x) + m \quad m \in \mathbb{Z} \Rightarrow$
$\tau(\tilde{F}) = \tau(F) + m \Rightarrow$ unicité mod $\mathbb{Z}$

Coroll 3 $a_n \le n\tau(F) \le b_n \quad \forall n$
d'où $\quad \tau(F) \in \frac{1}{n}\Delta_n(S^1) \quad \forall n$
en part $\quad \tau(F) \in \Delta_1(S^1)$

Thm 4

(1) $\tau(F)\in\mathbb{Q}$ ssi

(2) $\exists q\in\mathbb{Z}^*:\ \Delta_q(S^1)\cap\mathbb{Z}\neq\emptyset$

(3) f admet une orbite périodique

démo : (1) $\Rightarrow$ (2) $\quad \tau(F)=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$

$$\frac{p}{q}=\tau(F)\in\frac{1}{q}\Delta_q(S^1)\Rightarrow$$

$$p\in\Delta_q(S^1)=[a_q,b_q]$$

(2) $\Rightarrow$ (3) $\quad p=\Delta_q(x)$ un $x\in S^1$

$$=F^q(x)-x$$

$$\Rightarrow F^q(x)=x+p\equiv x \mod 1$$

$$f^q(\pi(x))=\pi(x)\in S^1.$$

(3) $\Rightarrow$ (2) $\quad f^q(x)=x\in S^1\Rightarrow$

$$F^q(x)=x+p \Rightarrow$$

$$\tau(F)=\lim_k \frac{F^{qk}(x)-x}{qk}=\frac{pk}{qk}=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$$

Thm 5 $\tau(f)$ est un invariant topologique :

Si $\tilde f=h\circ f\circ h^{-1}$, ~~h∘f∘h~~ $h,f\in \mathrm{homeo}_+(S^1)$ alors

$$\tau(f)=\tau(\tilde f)\pmod{\mathbb{Z}}$$

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{f} & S^1 \\ h\downarrow & & \downarrow h \\ S^1 & \xrightarrow{\tilde f} & S^1 \end{array}$$

conjugaison

démo : relevé : $F:\mathbb{R}\xrightarrow{C^0}\mathbb{R}$

$H:\mathbb{R}\xrightarrow{C^0}\mathbb{R}$.

$|\cancel{H(x)-x}| \ldots < \infty$ unif

$$|H(x)-H(y)-(x-y)|\leq 2 < \infty \text{ unif}$$

$$|\Delta_H(x)-\Delta_H(y)|$$

$$\tau(F)=\lim \frac{1}{n}(F^n(x)-x)=$$

$$\lim\frac{1}{n}(H^{-1}\circ\tilde F^n\circ H(x)-x)=$$

$$\lim\frac{1}{n}(\tilde F^n(H(x))-H(x))=$$

$$\lim_{n}\frac{1}{n}(\tilde F^n(y)-y)=\tau(\tilde F)$$

Thm 6 (Denjoy)

$f\in \mathrm{Diff}^2_+(S^1)$ (C^2-difféo).

$\theta=\tau(f)\notin\mathbb{Q}$. Alors

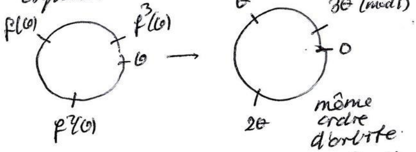
f est conjuguée à r_θ, i.e.

$\exists h\in \mathrm{homeo}_+(S^1)$: ~~h∘f∘h~~

$$h\circ f=r_\theta\circ h$$

---

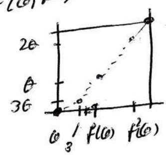
esquisse de démo :



même ordre d'orbite

$h:\{f^n(0):n\geq 1\}\longrightarrow\{n\theta \bmod 1\}_{n\geq 1}$ dense. θ irrat.

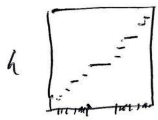
$f^n(0)\mapsto n\theta \bmod 1$



se prolonge en $h\in \mathrm{homeo}_+(S^1)$ ssi $O_f(0)$ est dense

vrai si $f\in C^2$

faux en général si $f\in C^1$ (Denjoy)



escalier du "diable" définit une semi conjugaison (non-inversible)

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{f} & S^1 \\ h\downarrow & & \downarrow \\ S^1 & \xrightarrow[r_\theta]{} & S^1 \end{array}$$

Nombres diophantiens

Def 7 $\theta \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ est dite de type (γ,α) diophantine si

$$(*) \quad \forall p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z}^* : |q\theta - p| \geq \frac{\gamma}{q^{2+\alpha}} \ (>0)$$

Rem on a $\alpha \geq 0$ et $0 < \gamma < 1/2$

Lemma 8 : $(*) \Rightarrow$

$$\forall q \in \mathbb{Z}^* : \frac{1}{|e^{2\pi i \theta q} - 1|} \leq \frac{q^{2+\alpha}}{4\gamma}$$

"le petit diviseur"

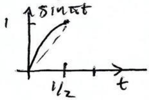
demo : prenons $p \in \mathbb{Z} : |p - q\theta| < 1/2$

Alors

$$|e^{2\pi i \theta q} - 1| = |e^{2\pi i (\theta q - p)} - 1| =$$

$$2\,|\sin(\pi(\theta q - p))| \geq$$

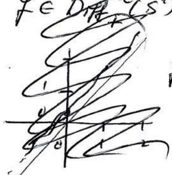
$$\underbrace{2 \cdot 2}_{4}\,|\theta q - p|$$



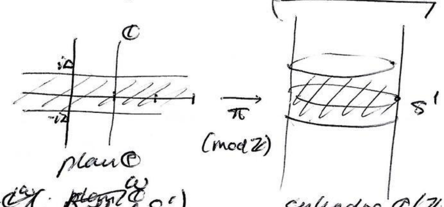
$\sin \pi t \geq 2t$
$0 \leq t \leq 1/2$

$f \in \mathrm{Diff}^{\omega}_{+}(S^1)$ f relevé

$f(x+1)=f(x)+1$
$\forall x \in \mathbb{R}$.



prolonger à un vois. complexe.



$f \in \mathrm{Diff}^{\omega}_{+}(S^1)$
$\exists \Delta > 0$

$$A_\Delta = \{x+iy : x \in \mathbb{R}, |y| < \Delta\}$$

$$f : A_\Delta \xrightarrow{C^\omega} \mathbb{C} \qquad f(z+1) = f(z)+1 \quad \forall z \in A_\Delta$$

$$x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) \in \mathbb{R},\ f'(x) > 0$$

$f(z) = z + \delta f(z)$. Alors

$\delta f(z+1) = \delta f(z)$ (1-périodique)

et : $\delta f(z) = \theta$, $f(z) = z + \theta = r_\theta(z)$ rotation rigide

$$\|\delta f\|_\Delta = \sup_{z \in A_\Delta} |\delta f(z)|$$

Rolmeg 84, Arn. 63, Moser 63-64

Thm 9 [Arnold][61]

Soit $f \in \mathrm{Diff}^{\omega}_{+}(S^1)$
(avec prol. analyt sur A_Δ
$\Delta > 0$) avec
de rot $\tau(f) = \theta \in \mathrm{Dioph}_{\gamma,\alpha}$

$\exists \epsilon = \epsilon(\gamma, \alpha, \Delta) > 0$ t.q. si

$\|\delta f - \theta\|_\Delta < \epsilon$

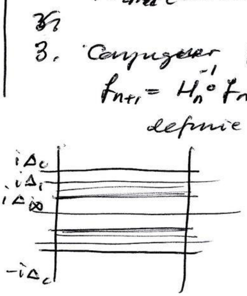
alors $f \underset{C^\omega}{\sim} r_\theta$, i.e.
conjug

$\exists H \in \mathrm{Diff}^{\omega}_{+}(S^1)$: $f \circ H = H \circ r_\theta$ (*)

---

esquisse de preuve (itérative) : $f_0 = f$.
$\Delta_0 = \Delta > 0$

1. On va linéariser (*) pr. à $H_\cdot$ sur A_{Δ_n} $n \geq 0$
2. Resoudre l'eqn lin sur $A_{\Delta'_n}$, $0 < \Delta'_n < \Delta_n$ (donne : H_n)
3. Conjuguer f_n avec H_n
   $f_{n+1} = H_n^{-1} \circ f_n \circ H_n$
   définie sur $A_{\Delta_{n+1}}$
   $0 < \Delta_{n+1} < \Delta'_n < \Delta_n$



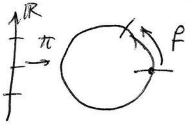
Mq $\Delta_n \longrightarrow \Delta_\infty > 0$

Mq $\|\delta f_n - \theta\|_{\Delta_\infty} \longrightarrow 0$

Mq $H_\cdot = \lim H_n \circ \cdots \circ H_0$
existe sur A_{Δ_∞} et ici
$f \circ H = H \circ r_\theta$

Diff^ω_+

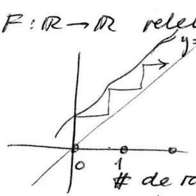
$f : S^1 \to S^1$



$f \approx$ rotation sur le cercle

$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ relevé

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{R} \arrow[d, "\pi"] \\ S^1 \arrow[r, "f"'] & S^1 \end{tikzcd}$$



$F(x+1) = F(x) + 1$

\# de rotation

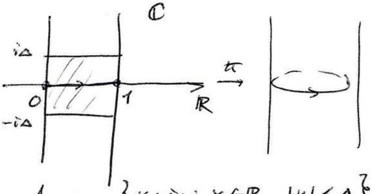
$\theta = \tau(F) = \lim \frac{1}{n}(F^n(x) - x) \in \mathbb{R}$

existe indép. de x
unique à $\mathbb{Z}$ près.

1-périodique

Lemme $\theta \in \{\overline{F(x) - x} : x \in \mathbb{R}\}$

+ ~~et~~ invariant topologique



$A_\Delta = \{x + iy : x \in \mathbb{R}, |y| < \Delta\}$

$\|\phi\|_\Delta = \sup_{z \in A_\Delta} |\phi(z)| \quad (\in [0, \infty])$

Déf 7 : $\theta \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ est dite diophantien de type (γ, α), $\alpha \geq 0$, $0 < \gamma < 1/2$ ssi

$$\forall p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^* : |p - q\theta| \geq \frac{\gamma}{q^{2+\alpha}}$$

Lemme 8 : $\forall q \in \mathbb{Z}^*$

$$\frac{1}{|e^{2\pi i \theta q} - 1|} \leq \frac{q^{2+\alpha}}{4\gamma}$$

Pb de conjugaison :

? Est-ce que f, $\theta = \tau(f) \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ est conjuguée à $r_\theta(x) = x + \theta$ (mod $\mathbb{Z}$)

$f(z) = z + \delta f(z)$

Thm 9 : [Arnold 61/85]

Soit $f \in \mathrm{Diff}_+^\omega(S^1)$ ← analytique réelle
(admet prolongement holomorphe sur A_Δ avec $\Delta > 0$)
avec $\tau(f) = \theta \in \mathrm{Dioph}(\gamma, \alpha)$. Alors

$\exists \varepsilon_0 = \varepsilon(\gamma, \alpha, \Delta) > 0$ t.q. si

$\|\delta f - \theta\|_\Delta < \varepsilon_0$, $f \underset{C^\omega}{\sim} r_\theta$,

i.e. $\exists H \in \mathrm{Diff}_+^\omega(S^1)$ t.q.

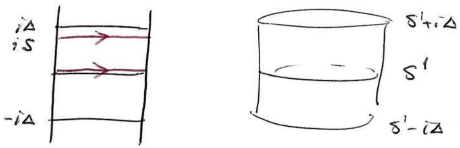
$f \circ H = H \circ r_\theta$

Transformée de Fourier pour fcts analytique 1-périodique

$S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$

$A_\Delta = \{x+iy : x \in \mathbb{R}, |y| < \Delta\}$

$\phi \in C^\omega(A_\Delta) \quad : \phi(z+1) = \phi(z)+1$



$$\|\phi\|_\Delta = \sup_{z \in A_\Delta} |\phi(z)| < +\infty$$

$$\phi(z) = \sum c_k(\phi)\, e^{2\pi i k z}$$

$$c_k(\phi) = \oint_{S^1} \phi(x)\, e^{-2\pi i k x}\, dx$$

intégral indép du choix de contour (ou classe d'homotopie) et $\underset{k\neq 0}{c_k(\text{const})} = 0$

$\underline{k \neq 0}$ $\quad c_k(\phi) = \oint_{S^1+iS} (\phi(z) - \alpha)\, e^{-2\pi i k z}\, dz$

$S \to \pm\Delta$ tq $\quad = \int_0^1 (\phi(t+iS) - \alpha)\, e^{-2\pi i k t + 2\pi k S}\, dt$

$kS \to -k\Delta$

$$|c_k(\phi)| \leq \|\phi - \alpha\|_\Delta\, e^{-2\pi |k| \Delta}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall \phi \in C^\omega(A_\Delta), \quad k \neq 0, \alpha \in \mathbb{C} \\ |c_k(\phi)| \leq \|\phi - \alpha\|_\Delta\, e^{-2\pi k \Delta} \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Lemme: Soit } \beta \geq 0,\ m < \infty. \\ \text{Alors, } \forall\, 0 < \delta < m: \\ \displaystyle\sum_{k \in \mathbb{Z}} |k|^{\beta} e^{-2\pi |k| \delta} \leq C_{\beta,m}\, \delta^{-(\beta+1)}\end{array}}$$

Demo: La fct Gamma $\Gamma(x)$, $x \geq 0$
vérifie $\Gamma(n+1) = n!$, $n \in \mathbb{N}$ et

$$(\log \Gamma(x+1))' \geq \log x \quad \forall x > 0.$$

d'où (T.A.F), $\beta \geq 0$:

$$\log \Gamma(x+1+\beta) - \log \Gamma(x+1) \geq \beta \log x$$

En particulier pour $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{\Gamma(n+1+\beta)}{\Gamma(n+1)} \geq n^{\beta} \quad \left(\begin{array}{c}\text{en effet} \\ \text{trivial} \\ \text{si } \beta \in \mathbb{N}\end{array}\right)$$

Pour $0 < \eta < 1$ on a :

$$(1-\eta)^{-(\beta+1)} = 1 + (\beta+1)\eta + \frac{(\beta+1)(\beta+2)}{1 \cdot 2}\eta^2 + \cdots$$

$$= \sum \binom{\beta+n}{n} \eta^n \geq \sum \frac{n^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} \eta^n$$

ou bien :

$$\sum n^{\beta} \eta^n \leq \Gamma(\beta+1)(1-\eta)^{-\beta-1}$$

Finalement pour $\delta > 0$:

$$\sum |k|^{\beta} e^{-2\pi\delta |k|} \leq 2 \sum_{n \geq 0} n^{\beta} (e^{-2\pi\delta})^n$$

$$\leq \Gamma(\beta+1)(1 - e^{-2\pi\delta})^{-\beta-1}$$

$$\leq \Gamma(\beta+1) \left(\frac{2\pi\delta}{1+2\pi\delta}\right)^{-(\beta+1)}$$

$$\leq \Gamma(\beta+1) \left(\frac{1+2\pi m}{2\pi}\right)^{\beta+1} \delta^{-(\beta+1)}$$

(on a utilisé $x \geq 0 \Rightarrow 1 - e^{-x} \geq \frac{x}{1+x}$)

Eqn de conjugaison ~~...~~ $f(z) = z + \delta f(z)$

$$f_\theta \circ H = H \circ r_\theta \Leftrightarrow$$

$$H(z) + \delta f_\theta(H(z)) = H(z+\theta) \quad \Big| \; H(z) = z + h(z)$$

$$z + h(z) + \delta f(z + h(z)) = z + \theta + h(z+\theta) \Leftrightarrow$$

$$\boxed{h(z+\theta) - h(z) = \delta f(z + h(z)) - \theta.}$$ Trouver h ? "petit"

Eqn linéarisée (1$^{\text{er}}$ ordre en δf, h)

$$\Leftrightarrow h(z+\theta) - h(z) = \delta f(z) - c_0(\delta f)$$ const necessaire $\quad 0 = \oint_{S^1} h(x+\theta) - h(x)\,dx = \oint_{S^1} \delta f(x) - c_0$

d'où $c_0 = \oint_{S^1} \delta f(x)\,dx$

On résout par series de Fourier

$$h(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(h)\, e^{2\pi i k z} \qquad \delta f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(\delta f)\, e^{2\pi i k z}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} c_k(h) \underbrace{(e^{2\pi i k \theta} - 1)}_{\text{vaut zéro pour } k=0} e^{2\pi i k z} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} c_k(\delta f)\, e^{2\pi i k z}.$$

Solution $\quad c_k(h) = \dfrac{c_k(\delta f)}{\underbrace{e^{2\pi i k \theta} - 1}_{\text{petit diviseur}}} \qquad k \neq 0 \qquad c_k = \bar{c}_{-k}$

$$|c_k(h)| \leq |c_k(\delta f - \theta)| \cdot \frac{|k|^{2+\alpha}}{4\gamma} \leq \|\delta f - \theta\|_\Delta \cdot \frac{|k|^{2+\alpha}}{4\gamma} e^{-2\pi |k| \Delta}$$

perte de régularité.
On en recapère en prenant un domaine plus petit. Soit ~~...~~ $0 < \Delta - \delta < \Delta \leq 1$

Pour $z \in A_{\Delta-\delta}$:

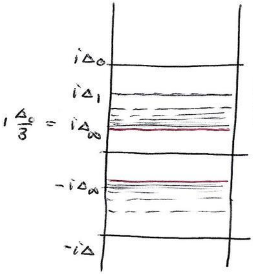
$$|h(z)| \leq \sum |c_k(h)|\, e^{2\pi |k| (\Delta - \delta)} \leq \frac{\|\delta f - \theta\|_\Delta}{4\gamma} \sum_{k \neq 0} |k|^{2+\alpha} e^{-2\pi \delta |k|}$$

$$\leq \|\delta f - \theta\|_\Delta \cdot (C_{2+\alpha,1})\, \delta^{-3-\alpha}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \|h\|_{\Delta-\delta} &\leq \|\delta f - \theta\|_\Delta \cdot \tfrac{1}{4\gamma} C_{2+\alpha,1} \cdot \delta^{-(3+\alpha)} \\ \|h'\|_{\Delta-\delta} &\leq \|\delta f - \theta\|_\Delta \tfrac{2\pi}{4\gamma} C_{3+\alpha,1}\, \delta^{-(4+\alpha)} \end{aligned}}$$

utiliser: $h' = \sum c_k(h) \cdot 2\pi i k \cdot e^{2\pi i k z}$

On va utiliser $H(z) = z + h(z)$ pour construire
$$\tilde{f}(z) = H^{-1} \circ f \circ H(z)$$ "plus proche" de r_θ (sur un dom plus petit)
et proceder par itération...



$\boxed{\Delta_0 = \Delta_\infty < 1}$

$\}\ \delta_0 = \Delta_0/3$

$\}\ \delta_1 = \Delta_0/3\cdot 2$

$\delta_n = \Delta_0/3\cdot 2^n$

$\Delta_{n+1} = \Delta_n - \delta_n$

$\Delta_\infty = \Delta_0/3$

Soient $f_n \in C^\omega(A_{\Delta_n})$ $f_n(z+1) = f_n(z)+1$

$h_n \in C^\omega(A_{\Delta_n - \delta_n/2})$

$\theta = \tau(f_n)$ # de rot^n.

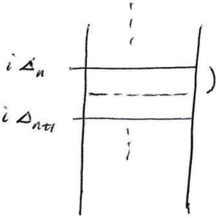
$f_0 = \cancel{f\ldots}\ z + \delta f_0(z) = z + \delta f(z)$

Etant donné δf_n, $n \geq 0$

On utilise $(**)$ avec $\quad \epsilon_n = \|\delta f_n - \theta\|_{\Delta_n}$

$$\delta = \frac{\delta_n}{2} = \frac{\Delta_0}{3\cdot 2^{n+1}} \leq \frac{1}{6}$$

~~Etant~~ $\Delta_n = \Delta_0\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cdot 2^{-n}\right)$



$\delta_n/2 =: \delta$

On pose les conditions suivantes

$$\left|\begin{array}{ll} \|h_n\|_{\Delta_n - \delta_n/2} \leq & \delta_n/4 \\ \|h_n'\|_{\Delta_n - \delta_n/2} \leq & \delta_n \leq 1/3\cdot 2^n \end{array}\right.$$

qui sont vérifiées si

$$\|\delta f_n - \theta\|_{\Delta_n} \cdot \left(\frac{2\pi}{4\gamma} C_{3+\alpha,1}\right)\cdot(\delta_n/2)^{-(4+\alpha)} \leq \delta_n$$

ou bien si $\boxed{\epsilon_n \cdot (\cancel{\text{const}})\ \delta_n^{-(5+\alpha)} \leq 1}$ (C1)

$C_1(\alpha,\gamma,\Delta)$ ← const calculable

$H_n(z) = z + h_n(z)$

Comment construire $f_{n+1} = H_n^{-1} \circ f_n \circ H_n$

Lemma $H_n \in \mathrm{Diff}_+^{\omega}(S^1)$ et $\exists x_n \in S^1$ tq

Astuce d'Arnold $H_n(x_n+\theta) = f_n \circ H_n(x_n)$

Donc : $H_n \in C^{\omega}(A_{\Delta_n - \delta_n/2})$ et pour $x \in S^1$,

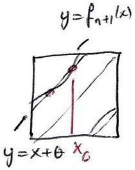
$|H_n'(x) - 1| \le \delta_n \le \frac{1}{3 \cdot 2^n} < 1$

Donc $1 - \frac{1}{3} \le H_n'(x) \le 1 + \frac{1}{3}$

H_n est donc monotone stricte (croiss.) de degree 1. Donc $H_n \in \mathrm{Diff}_+^{\omega}(S^1)$

Pour $x \in S^1$: $f_{n+1}(x) = H_n^{-1} \circ f_n \circ H_n \in \mathrm{Diff}_+^{\omega}(S^1)$ et f_n et f_{n+1} sont conjugué $\Rightarrow$

rot^n : $\tau(f_{n+1}) = \tau(f_n) = \theta$



En particulier $\exists x_n \in S^1$

$\theta \in \{ f_{n+1}(x) - x : x \in S^1 \} \Rightarrow \theta = f_{n+1}(x_n) - x_n \Rightarrow$

$f_{n+1}(x_n) = x_n + \theta \Rightarrow$

$H_n \circ f_{n+1}(x_n) = H_n(x_n+\theta) = f_n \circ H_n(x_n)$

Pour $z \in A_{\Delta_{n+1}} = A_{\Delta_n - \delta_n}$

$$
\begin{aligned}
f_n \circ H_n(z) &= H_n(z) + \delta f_n(z + h_n(z)) \\
&= z + h_n(z) + \delta f_n(z) + \underline{(\delta f_n(z+h_n(z)) - \delta f_n(z))} \\
&= z + h_n(z+\theta) + C_0(\delta f_n) + \eta_n(z) \\
&= H_n(z+\theta) + \underbrace{(C_0(\delta f_n) - \theta) + \eta_n(z)}_{\psi_n(z)}
\end{aligned}
$$

$\delta f_n'(z) = \oint_{\partial B(z,\delta_n/2)} \frac{\delta f_n(u) - \theta}{(u-z)^2} \frac{du}{2\pi i}$

$$|\eta_n(z)| \le \|h_n\|_{\Delta_n - \delta_n} \cdot \|\delta f_n'\|_{\Delta_n - \delta_n/2}$$

$\le \epsilon_n \,\mathrm{cst}\, \delta_n^{-(3+\alpha)} \le \delta_n/4$ $\qquad$ $\le \|\delta f_n - \theta\| \times \frac{1}{\delta_n/2} \le 2\epsilon_n \delta_n^{-1}$

$$\le \epsilon_n^2 \cdot (\mathrm{const})_{\alpha,\gamma,\Delta_0} \times \delta_n^{-(4+\alpha)}$$

quadratique en ϵ_n !

(Astuce d'Arnold) $\exists\, x_n : H_n(x_n + \theta) = f_n \circ H_n(x_n) \Rightarrow$
$\Rightarrow$

$$0 = (C_0(\delta f_n) - \theta) + \eta_n(x_0)$$

$$|\psi_n(z)| \doteq |\underbrace{(C_0(\delta f_n) - \theta) + \eta_n(z)}_{\psi_n(z)}| \le 2\|\eta_n\|_{\Delta_n - \delta_n} \le \mathrm{const} \cdot \epsilon_n^2 \cdot \delta_n^{-(4+\alpha)}$$

$\omega = f_{n+1}(z)$ sera definie par: $\quad H_n \circ f_{n+1}(z) = f_n \circ H_n(z)$

$$H(\omega) = f_n \circ H_n(z) = H(z+\theta) + (\cancel{C_0 - \theta + \eta_n(z)})\ \psi_n$$

$$\omega + h(\omega) = z + \theta + h(z+\theta) + (\cancel{C_0 - \theta + \eta_n})\, \psi_n(z)$$

pt fixe de $\quad \omega = \underbrace{(z+\theta) + h(z+\theta) - h(\omega) + \psi_n(z)}_{\Gamma(\omega)}$ $\qquad$ pour $\omega \in A_{\Delta_n - \delta_n/2}$, $z \in A_{\Delta_n - \delta_n}$

$$\|\Gamma'\| \le \delta_n \le 1/6 < 1$$

$$|\Gamma(\omega) - (z+\theta)| \le 1/6\, |\omega - (z+\theta)| + |\psi_n(z)| \qquad \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

Si $\quad |\psi_n(z)| \le \delta_n/3$ alors $\quad \Gamma : \overline{B(z+\theta, \delta_n/2)} \to \overline{B(z+\theta, \delta_n/2)}$

Contraction Lipsch $\Rightarrow \exists!\, \omega = \Gamma(\omega) \in \overline{B(z+\theta, \delta_n/2)} \subset A_{\Delta_n - \delta_n/2}$

D'où Condition (C2) $\quad \boxed{C_2(\gamma,\alpha,\Delta_0)\, \epsilon_n^2\, \delta_n^{-(5+\alpha)} \le 1} \Rightarrow |\psi_n(z)| \le \frac{\delta_n}{3}$

On pose $f_{n+1}(z) = \omega$ $\quad$ ~~...~~

$$f_{n+1}(z) - (z+\theta) = \omega - (z+\theta) = h(z+\theta) - h(\omega) + \psi_n(z)$$

$$|\omega - (z+\theta)| \le \frac{1}{6}\, |(z+\theta-\omega)| + 2|\psi_n(z)| \Rightarrow$$

$$|\delta f_{n+1} - \theta| \le |\omega - (z+\theta)| \le \frac{6}{5} \cdot 2|\psi_n(z)| \le \mathrm{const}\; \epsilon_n^2 \cdot \delta_n^{-(4+\alpha)}$$

$$\boxed{\epsilon_{n+1} = \|\delta f_{n+1} - \theta\|_{\Delta_{n+1}} \le C_3\, \epsilon_n^2 \cdot \delta_n^{-(4+\alpha)}}$$

Lemme : Soit $c>0$, $\lambda>1$.
Supposons que la suite $u_n>0$ vérifie :

$$0 \leq u_0 \leq \frac{1}{c\lambda^2}$$

$$0 \leq u_{n+1} \leq c\lambda^{n+1} u_n^2 \quad \forall n \geq 0$$

Alors :

$$u_n \leq \frac{1}{c\lambda^{n+2}} \quad \text{et} \quad u_{n+1} \leq \frac{1}{\lambda} u_n$$

En particulier $u_n^2\lambda^n$, $u_n\lambda^n$ est uniformement borné

dém : Posons : $v_n = \frac{1}{c\lambda^{n+2}}$. On a

$$v_{n+1} = \frac{1}{c\lambda^{n+3}} = c\lambda^{n+1}\left(\frac{1}{c\lambda^{n+2}}\right)^2 = c\lambda^{n+1}v_n^2$$

Alors $\forall n \geq 0$: $0 \leq u_n \leq v_n$ car
vrai pour n alors

$$u_{n+1} \leq c\lambda^{n+1}u_n^2 \leq c\lambda^{n+1}v_n^2 = v_{n+1}$$

Ensuite
$$\begin{aligned} u_{n+1} &\leq c\lambda^{n+1}u_n^2 \\ &\leq (c\lambda^{n+1}u_n)\, u_n \\ &\leq (c\lambda^{n+1}v_n)\, u_n = \frac{1}{\lambda} u_n \quad // \end{aligned}$$

$$u_n^2\lambda^n \leq v_n^2\lambda^n = \frac{1}{c^2\lambda^{n+4}} \longrightarrow 0$$

$$u_n\lambda^n \leq v_n\cdot\lambda^n = \frac{1}{c\lambda^2}$$

Posons $\lambda = 2^{5+\alpha} > 1$,
Comme $\delta_n = \text{const} \cdot 2^{-n}$
on a

$$\delta_n^{-5-\alpha} = \text{const}\ \lambda^n$$

Conditions $(C1)_n$ et $(C2)_n$ peuvent s'écrire

$$\mathscr{C}_n \begin{cases} \tilde{c}_1 \epsilon_n \lambda^n \leq 1 \\ \tilde{c}_2 \epsilon_n^2 \lambda^n \leq 1 \end{cases}$$

et lorsque vérifié on peut utiliser l'itération d'Arnold

$$\epsilon_{n+1} \leq \tilde{c}_3\ \epsilon_n^2 \cdot \lambda^n$$

Lemme : Prenons $c = \max\{\tilde{c}_3, \frac{\tilde{c}_1}{\lambda^2}, \frac{\sqrt{\tilde{c}_2}}{\lambda^2}\}$ et $\epsilon_0 = \frac{1}{c\lambda^2}$.
Alors le schéma d'itération marche $\forall n \geq 0$.

Pour $n=0$

$$\mathscr{C}_0 \begin{cases} \tilde{c}_1 \epsilon_0 \cdot 1 \leq \frac{\tilde{c}_1}{c\lambda^2} \leq 1 \\ \tilde{c}_2 \epsilon_0^2 \cdot 1 \leq \frac{\tilde{c}_2}{c^2\lambda^4} \leq 1 \end{cases}$$

ok pour itération

$$\epsilon_1 \leq \tilde{c}_3\ \epsilon_0^2 \cdot \cancel{\lambda} \leq c\ \epsilon_0^2 \cdot \lambda$$

Si ok pour $n-1$ on a par le lemme prec $\epsilon_n \leq \frac{1}{c\lambda^{n+2}}$

$$\mathscr{C}_n \begin{cases} \tilde{c}_1 \epsilon_n \lambda^n \leq \tilde{c}_1 \frac{1}{c\lambda^{n+2}} \lambda^n \leq \frac{\tilde{c}_1}{c\lambda^2} \leq 1 \\ \tilde{c}_2 \epsilon_n^2 \lambda^n \leq \tilde{c}_2 \left(\frac{1}{c\lambda^{n+2}}\right)^2 \lambda^n \leq \frac{\tilde{c}_2}{c^2\lambda^4} \leq 1 \end{cases}$$

ok pour it.

$$\epsilon_{n+1} \leq \tilde{c}_3\ \epsilon_n^2 \lambda^n \leq c\ \epsilon_n^2 \lambda^{n+1} \quad //$$

Demo (thm d'Arnold)

Posons $\lambda = 2^{5+\alpha} > 1$. Comme $\delta_n = \text{cont.}\, 2^{-n} < 1$

on a $\delta_n^{-(5+\alpha)} = c_3 \cdot \lambda^{n+1}$

~~Soit $c>0$ et $\epsilon_0 = \frac{1}{c\lambda^2}$~~

Soit

$$\epsilon_0 = \min \left\{ \frac{1}{\sqrt{c_2 c_3}}, \frac{1}{c_1 c_3} \right\} \frac{1}{\lambda^2} > 0$$

Alors $(C1)_{n=0}$ et $(C2)_{n=0}$ sont verifie

$n=0$ | (C2) $\quad c_2 \epsilon_0^2 \delta_0^{-(5+\alpha)} = c_2 c_3 \epsilon_0^2 \le \frac{1}{\lambda^4} < 1$

(C1) $\quad c_1 \epsilon_0 \delta_0^{-(5+\alpha)} = c_1 c_3 \epsilon_0 \le \frac{1}{\lambda^2} < 1$

donc on peut construire pour $n=1$ ...

Induction Par le Lemme precedent si ok pour n:

$$\epsilon_{n+1} \le c_2 \epsilon_n^2 \cdot \delta_n^{-(4+\alpha)} \le \frac{c_3 c_2 \epsilon_n^2 \lambda^{n+1}}{\lambda^2}$$

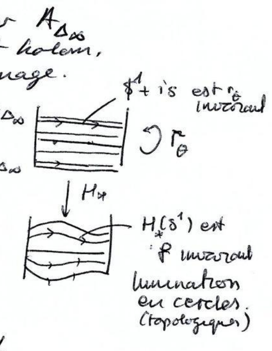
$(C2)_n \quad c_2 \epsilon_n^2 \delta_n^{-(5+\alpha)} = c_2 c_3 \epsilon_n^2 \lambda^{n} \le \frac{1}{c^2 \lambda^{n+4}} < 1 \to 0$

$(C1)_n \quad c_1 \epsilon_n \delta_n^{-(5+\alpha)} = c_1 c_3 \epsilon_n \lambda^n \le \frac{1}{c\lambda^2} < 1$

donc ok pour $n+1$

$H_* = \lim_n H_0 \circ H_1 \circ \dots \circ H_n$ converge unif. sur A_{Δ_∞} vers une fct holom, diffeo sur son image.

$z_{n+1} \xrightarrow{H_n} z_n \to \dots \to z_1 \xrightarrow{H_0} z_0$



$$|H_n'(z) - 1| \le \delta_n \le \frac{1}{6 \cdot 2^n}$$

$$\left| \prod_{k=n}^{m} (1 + h_k'(z_{k+1})) - 1 \right| \le$$

$$\left| \prod (1 + |h_k'(z_{k+1})|) - 1 \right| \le$$

$$\exp\left(\sum |h_k'(z_{k+1})| \right) - 1 \le$$

$$\exp\left(\tfrac{1}{6} \cdot 2 \right) - 1 \le e^{1/3} - 1 \le \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \| H_0 \circ \dots \circ H_m - H_0 \circ \dots \circ H_n \|_{\Delta_\infty} \xrightarrow[n,m]{} 0$$

TAF

$m > n \quad |H_0 \circ \dots \circ H_n(z) - H_0 \circ \dots \circ H_m(z)| \le 2 \cdot \|z - H_{n+1} \circ \dots \circ H_m(z)\|$

$$\le 2 \cdot \frac{1}{6 \cdot 2^n}$$

$$f_0 \circ (H_0 \circ \dots \circ H_m) = H_0 \circ f_1 (H_1 \circ \dots \circ H_n) = \dots = (H_0 \circ \dots \circ H_n) \circ \rho_n \to r_\theta$$

($f_0 \circ H_*$, $\to H_* \circ r_\theta$)