

---

**Interrogation n° 2**

20 mai 2014 – durée 45 minutes

*Les documents et les téléphones portables sont interdits.*

**Ne donnez pas uniquement les résultats sans explication !** Expliquez quels calculs vous faites et pourquoi.

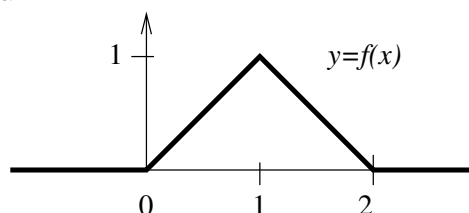
On a le droit de donner un résultat avec un calcul non fini (par exemple  $\frac{3}{7} + \frac{7}{18}$  ou  $C_{17}^7 \frac{1}{2^7}$ ), ce qui permet de se passer de calculatrice.

**Exercice 1.** Bob propose à Alice le jeu suivant : Alice doit d'abord payer 3 euros pour jouer, puis elle lance un dé à 6 faces (numérotées 1, 2, 3, 4, 5, 6), et Bob lui donne la somme (en euros) correspondant au résultat du dé obtenu ; on suppose que le dé est équilibré, c'est-à-dire que toutes les faces ont la même probabilité. Soit  $X$  la variable aléatoire représentant le montant gagné ou perdu à la fin du jeu, en prenant en compte le fait qu'il faut payer pour jouer (une valeur positive indique un gain pour Alice, une valeur négative indique une perte).

Quelle est la loi de  $X$  ? (autrement dit, donner les valeurs prises par  $X$  et la probabilité de prendre chacune de ses valeurs). Que vaut  $E(X)$  ?

**Exercice 2.** Soit  $X$  une variable aléatoire ayant pour densité la fonction continue  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dont le graphe est ci-dessous à droite et qui est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 2 - x & \text{si } x \in ]1, 2] \\ 0 & \text{si } x < 0 \text{ ou } x > 2 \end{cases}$$



Calculer  $P(X \geq \frac{1}{2})$ .

**Exercice 3.** On veut transmettre un message électronique composé des digits 0 et 1. Les conditions imparfaites de transmission font qu'il y a une probabilité  $p = 0,1$  pour qu'un 0 soit changé en un 1 ou qu'un 1 soit transformé en un 0 lors de la réception, de façon indépendante pour chaque digit.

a) Soit  $X$  la variable aléatoire "nombre d'erreurs commises lors de la transmission de 5 digits". Quelle est la loi de  $X$  ?

b) Pour améliorer la qualité de la transmission, on émet le bloc 00000 au lieu de 0 et le bloc 11111 au lieu de 1 ; quand on reçoit un bloc de 5 digits, on le traduit par 0 s'il contient une majorité de 0 et on le traduit par 1 s'il contient une majorité de 1.

On envoie le bloc 00000. Quelle est la probabilité de le traduite (à tort) par 1 après réception (c'est-à-dire la probabilité de recevoir une majorité de 1 si 00000 est émis) ?

**Exercice 4.** Une machine fabrique des plaques de tôle. On mesure l'épaisseur en millimètres. On suppose que l'épaisseur de chaque plaque suit une loi normale  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$  avec  $m = 0,3$  (espérance) et  $\sigma = 0,1$  (écart-type), et que les épaisseurs des différentes plaques sont indépendantes.

a) Soit  $X$  la variable aléatoire "épaisseur d'une plaque". Calculez la probabilité  $P(X \leq 0,36)$ .

*Donnée numérique pour le calcul : si  $N$  suit une loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$ ,  $P(0 \leq N \leq 0,6) \simeq 0,226$ .*

b) On empile  $n$  plaques (avec  $n \geq 1$  un entier). Pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , on note  $X_i$  la variable aléatoire « épaisseur de la plaque numéro  $i$  ». Soit  $Z$  la variable aléatoire « épaisseur des  $n$  plaques ». Exprimer  $Z$  en fonction de  $X_1, \dots, X_n$ . Que valent  $E(Z)$  et  $\text{Var}(Z)$  ? Quelle est la loi de  $Z$  ?

---

Barème : 5 – 5 – 4 – 6