Examen du 16 juin 2014 – durée 2 heures

Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Ne donnez pas uniquement les résultats sans explication !
On a le droit de donner un résultat sous forme de formule (par exemple $C_{17}^{7}\,\frac{1}{2^7}$).

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, c'est-à-dire ayant pour densité la fonction f telle que $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ si $x \geq 0$ et $f(x) = 0$ si $x < 0$. Calculer le nombre réel T tel que $P(X \leq T) = P(X \geq T) = \frac{1}{2}$.

Exercice 2. Soit X_1, X_2 des variables aléatoires, chacune suivant une loi normale standard $\mathcal{N}(0, 1)$. On note $Y = X_1 + X_2$.
a) Si X_1 et X_2 sont indépendants, dire ce que valent $E(Y)$ et $\mathrm{Var}(Y)$ et quelle est la loi de Y.
b) Si $X_1 = X_2$, dire ce que valent $E(Y)$ et $\mathrm{Var}(Y)$ et quelle est la loi de Y.

Exercice 3. On veut tester un médicament pour une certaine maladie. On note p la proportion (inconnue) de malades guéris par ce médicament, et on veut déterminer un intervalle de confiance pour p. On teste le médicament sur 1200 malades, les 3/4 de ces malades guérissent (on suppose que la guérison d'un malade est indépendante des autres malades).
a) Modéliser le problème en termes de variables aléatoires.
b) Déterminer un intervalle de confiance contenant p avec une probabilité de 95%.

Exercice 4. Des pièces sont fabriquées par deux machines A et B. Les pièces produites par A ont une probabilité 1/5 d'être défectueuses, et les pièces produites par B ont une probabilité 1/10 d'être défectueuses (les pièces sont défectueuses ou non indépendamment les unes des autres). Chaque machine produit 100 pièces en une heure. On considère toutes les pièces produites par A et B pendant une heure et on en tire une au hasard (c'est-à-dire que le tirage de chaque pièce est équiprobable).
a) Quelle est la probabilité que la pièce tirée soit défectueuse ?
b) Si la pièce tirée est défectueuse, quelle est la probabilité qu'elle ait été produite par la machine A ?

Exercice 5. Soit X_1, X_2 des variables aléatoires indépendantes, chacune suivant une loi de Bernoulli $b(p)$, où $p \in]0, 1[$ et $Y = X_1 + X_2$. Quelle est la loi de Y ? Calculer $P(X_1 = 1 \mid Y = 2)$.

Exercice 6. Une usine fabrique des boulons, qui ont une probabilité $p_0 = 0.1$ d'être défectueux. On change une des machines, on se demande si cela change le taux de boulons défectueux. On suppose que chaque boulon a la même probabilité p d'être défectueux, indépendamment des autres boulons. On teste un lot de 900 boulons (après changement de machine), on trouve une proportion de 7% de boulons défectueux dans ce lot. On fait deux hypothèses :
– H_0 : le taux n'est pas changé (c'est-à-dire $p = 0.1$),
– H_1 : le taux est changé (c'est-à-dire $p \neq 0.1$).
Faites un test de l'hypothèse H_0 contre l'hypothèse H_1, au seuil de 5% (c'est-à-dire avec une probablilité ≤ 0.05 de rejeter H_0 à tort). En déduire si, avec ce seuil, on peut conclure que le changement de machine influe sur le taux de boulons défectueux.

Exercice 7. On considère l'ensemble $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ muni de la probabilité uniforme, et les évènements $A = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$. Les évènements A et B sont-ils indépendants ? Calculer $P(A \mid B)$.

Exercice 8. On tire simultanément 3 cartes dans un jeu de 32 cartes. On rappelle qu'un tel jeu contient 8 cartes de chaque couleur (pique, cœur, carreau, trèfle), et chaque couleur contient une unique carte de chaque valeur (en particulier chaque couleur contient un roi).
a) Quelle est la probabilité d'obtenir 3 rois ?
b) Quelle est la probabilité d'obtenir 2 rois et 2 piques ?

Donnée pouvant servir pour certains exercices :

Si N suit une loi normale standard $\mathcal{N}(0, 1)$, $P(-2 \leq N \leq 2) \simeq 0.95$.

Barème : 1.5 – 2 – 4 – 3 – 2 – 3.5 – 2 – 2