Examen de seconde session – 1er septembre 2015 – durée 2 heures

Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Ne donnez pas uniquement les résultats sans explication !

On a le droit de donner un résultat sous forme de formule (par exemple $C_{17}^7 \frac{1}{2^7}$).

Exercice 1. Dans une certaine population, la probabilité d'avoir les yeux bleus est de 1/3 et la probabilité de mesurer plus de 180 cm est de 1/4. On suppose que la couleur des yeux et la taille sont indépendants. Quelle est la probabilité d'avoir les yeux bleus et de mesurer moins de 180 cm ?

Exercice 2. Dans une certaine population, 1/5 des femmes portent des jeans et la moitié des hommes portent des jeans. Il y a autant de femmes que d'hommes.
a) Quelle est la proportion de personnes portant des jeans ?
b) Quelle est la probabilité pour qu'une personne portant un jeans prise au hasard soit un homme ?

Exercice 3. Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$, c'est-à-dire que X a pour densité la fonction f telle que $f(x) = 1$ si $x \in [0,1]$ et $f(x) = 0$ si $x \in [-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$.
a) Rappeler la définition de la variance d'une variable aléatoire à densité.
b) Calculer $E(X)$ et $\text{Var}(X)$.

Exercice 4. Une usine fabrique des feuilles de papier, puis les met en paquets de 500 feuilles. On suppose que l'épaisseur des feuilles (mesurée en millimètres) suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, où $m = 0.1$ et $\sigma^2 = 0.01$ (σ^2 est la variance de la loi normale considérée). On suppose de plus que les épaisseurs des différentes feuilles sont indépendantes entre elles.
Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, 500\}$, on note X_i la variable aléatoire donnant l'épaisseur de la feuille numéro i dans le paquet. Soit Z la variable aléatoire donnant l'épaisseur d'un paquet de 500 feuilles. Exprimer Z en fonction de $X_1, \dots, X_{500}$. Que valent $E(Z)$ et $\text{Var}(Z)$? Quelle est la loi de Z ?

Exercice 5. On considère l'expérience consistant à lancer 900 fois une pièce équilibrée (c'est-à-dire qu'elle a autant de chance de tomber sur “pile” que sur “face”), et on appelle F le nombre de fois qu'on obtient “face”.
a) Modéliser le problème en termes de variables aléatoires.
b) Déterminer un intervalle de confiance contenant F avec une probabilité de 95%.

Exercice 6. On veut comparer 2 lessives, A et B. Soit p la proportion de consommateurs préférant la lessive A. On veut savoir si la lessive A est préférée à la lessive B. On fait un sondage : sur 400 personnes interrogées, 208 (soit 52%) disent préférer la lessive A. On fait deux hypothèses :
– H_0 : les consommateurs n'ont pas de préférence entre les lessives A et B (c'est-à-dire $p = \frac{1}{2}$),
– H_1 : les consommateurs préfèrent la lessive A (c'est-à-dire $p > \frac{1}{2}$).
Faites un test de l'hypothèse H_0 contre l'hypothèse H_1, au seuil de 5% (c'est-à-dire avec une probabilité ≤ 0.05 de rejeter H_0 à tort). En déduire si, avec ce seuil, on peut conclure que la lessive A est préférée à la lessive B.

Exercice 7. On lance un dé à 6 faces, numérotées de 1 à 6. On note P la probabilité associée à cette expérience (on suppose que le dé est équilibré, c'est-à-dire que toutes les faces ont la même probabilité d'apparaître lors d'un lancer). On définit les évènements :
A : obtenir un nombre ≤ 5.
B : obtenir un nombre pair.
Écrire les éléments de l'évènement $A \cap B$. Que vaut $P(A|B)$?

Données pouvant servir pour certains exercices :

Si N suit une loi normale standard $\mathcal{N}(0,1)$:
$P(-2 \leq N \leq 2) \simeq 0.95, \qquad P(N \leq 1.6) \simeq 0.95.$

Barème : 2 – 3 – 3 – 2 – 4 – 4 – 2