Corrigé de l'interrogation n° 2

Exercice 1. Soit X la variable aléatoire donnant l'heure d'arrivée de Madame Michel. Madame Michel arrive au marché quand le fleuriste est là si $10 \leq X \leq 12$. Donc la probabilité cherchée est $P(10 \leq X \leq 12)$.
La loi de X est la loi uniforme sur $[8, 11]$, qui est un intervalle de longueur 3, donc sa densité est : $f(x) = \frac{1}{3}$ si $x \in [8, 11]$ et $f(x) = 0$ si $x \notin [8, 11]$.
Donc $P(10 \leq X \leq 12) = \displaystyle\int_{10}^{12} f(x)\,dx = \int_{10}^{11} \frac{1}{3}\,dx = \frac{1}{3}$.
Conclusion : la probabilité pour que Mme Michel arrive au marché quand le fleuriste est là vaut $\frac{1}{3}$.

Exercice 2. a) $P(0 \leq X \leq \frac{1}{2}) = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} 3x^2\,dx = \left[x^3\right]_0^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 0^3 = \frac{1}{8}$.
b) Si X est une variable aléatoire de densité f, l'espérance de X est définie par :
$E(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$.
Avec la densité de l'énoncé, on a :
$E(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0x\,dx + \int_0^1 3x^3\,dx + \int_1^{+\infty} 0x\,dx = 0 + \left[\frac{3}{4}x^4\right]_0^1 + 0 = \frac{3}{4}$.

Exercice 3. a) La table donne $P(0 \leq N \leq 1.32) = 0.4$. Comme la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ est symétrique par rapport à 0, on a $P(-1.32 \leq N \leq 0) = 0.4$ et $P(N > 0) = 0.5$.
Donc $P(N \geq -1.32) = P(-1.32 \leq N \leq 0) + P(N > 0) = 0.9$. Le réel t cherché est $t = -1.32$.
b) Soit $Y = \frac{X-m}{\sigma}$. Comme X suit la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, Y suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.
$Y \geq t \Leftrightarrow X \geq m + \sigma t$. Donc, si on pose $u = m + \sigma t$, on a $P(X \geq u) = P(Y \geq t) = 0.9$ par a).
Avec les données de l'énoncé, on a : $u = 200 - 10 \times 1.32 = 186.8$.
c) La variable aléatoire Z s'écrit $Z = X_1 + X_2 + \cdots + X_{50}$ (somme des poids des 50 tablettes d'un lot). On rappelle qu'une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ a pour espérance m et pour variance σ^2.
On a donc :
- $E(Z) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_{50}) = 50m = 10000$,
- par indépendance des $X_1, \ldots, X_{50}$, $\mathrm{Var}(Z) = \mathrm{Var}(X_1) + \cdots + \mathrm{Var}(X_{50}) = 50\sigma^2 = 50 \times 10^2 = 5000$.

Selon une propriété du cours, la somme de variables aléatoires indépendantes suivant des lois normales est une variable aléatoire de loi normale. Donc Z suit une loi normale. Comme $E(Z) = 50m$ et $\mathrm{Var}(Z) = 50\sigma^2$, Z suit la loi $\mathcal{N}(50m, 50\sigma^2) = \mathcal{N}(10000, 5000)$.

Exercice 4. Soit X_A le nombre de clés essayées pour arriver à ouvrir l'armoire A. X_A est une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\{1, 2, 3\}$. On numérote les clés dans l'ordre dans lesquelles elles sont essayées : C1, C2, C3. Les 3 clés ont la même probabilité d'être la bonne clé, cette probabilité commune vaut $\frac{1}{3}$. Si la clé ouvrant A est C1, alors $X_A = 1$, donc $P(X_A = 1) = \frac{1}{3}$. De même, si la clé ouvrant A est C2 alors $X_A = 2$ et si la clé ouvrant A est C3 alors $X_A = 3$. Donc $P(X_A = 2) = \frac{1}{3}$ et $P(X_A = 3) = \frac{1}{3}$.
Soit X_B le nombre de clés essayées pour arriver à ouvrir l'armoire B. Il reste 2 clés, donc X_B est une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\{1, 2\}$. Le même raisonnement que pour A donne que $P(X_B = 1) = \frac{1}{2}$ et $P(X_B = 2) = \frac{1}{2}$.
Les variables aléatoires X_A et X_B sont indépendantes (le fait d'avoir trouvé la clé de A ne donne pas d'information sur la clé ouvrant B parmi les 2 clés restantes). Donc, pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$ et tout $j \in \{1, 2\}$, $P(X_A = i, X_B = j) = P(X_A = i)P(X_B = j) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$. On a $X = X_A + X_B$. Donc les valeurs de X en fonction de X_A et X_B sont :

	$X_A = 1$	$X_A = 2$	$X_A = 3$
$X_B = 1$	2	3	4
$X_B = 2$	3	4	5

On a vu que chaque case a une probabilité $\frac{1}{6}$. Donc X prend ses valeurs dans $\{2, 3, 4, 5\}$ et la loi de X est : $P(X = 2) = \frac{1}{6}$, $P(X = 3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$, $P(X = 4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$, $P(X = 5) = \frac{1}{6}$.