Corrigé de l'interrogation n° 1

Exercice 1. Pour l'ensemble des résultats possibles (ensemble Ω), on prend l'ensemble des triplets ordonnés (i, j, k) avec $i, j, k \in \{1, 2, \dots, 6\}$; il y en a 6^3. Tous les cas sont équiprobables. On peut donc utiliser la formule suivante pour calculer la probabilité d'un évènement :

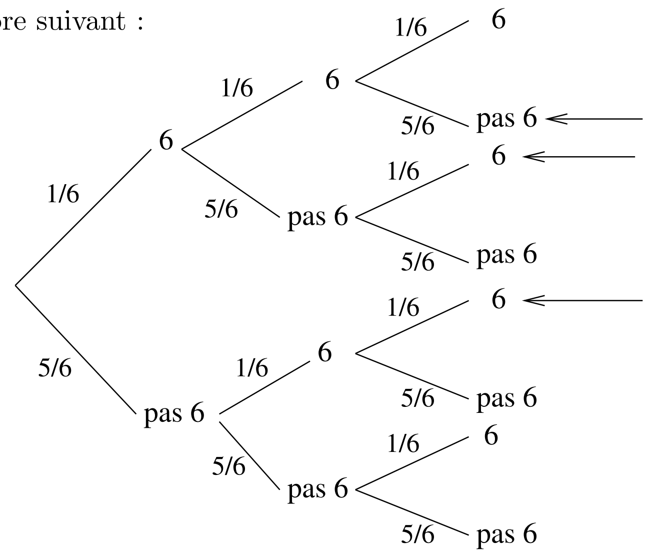
$$\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

a) Pour obtenir exactement 2 fois le chiffre "6", il faut choisir
– 2 dés parmi 3 qui donnent "6" : il y en a $C_3^2 = 3$,
– le résultat du dé qui ne donne pas "6" : il y en a 5.
Ce qui donne $C_3^2 \times 5 = 3 \times 5 = 15$ cas favorables.
Conclusion : la probabilité d'obtenir exactement 2 fois le chiffre "6" vaut $\frac{C_3^2 \times 5}{6^3} = \frac{15}{6^3} = \frac{5}{72}$.

b) Pour obtenir 3 fois le même chiffre, il faut choisir quel chiffre (il y a 6 choix), ce qui fixe le résultat des 3 dés. Ceci donne 6 cas favorables.
Conclusion : la probabilité d'obtenir 3 fois le même chiffre est $\frac{6}{6^3} = \frac{1}{36}$.

Autre méthode : on peut résoudre cet exercice par des arbres de probabilité. Mais si on fait brutalement l'arbre de tous les tirages possibles, il y a 3 niveaux (un par dé) et 6 embranchements à chaque nœud, ce qui fait un arbre énorme ($6^3 = 216$ branches). Mieux vaut dessiner seulement une partie de l'arbre, ou un autre arbre.

a) On peut faire l'arbre suivant :



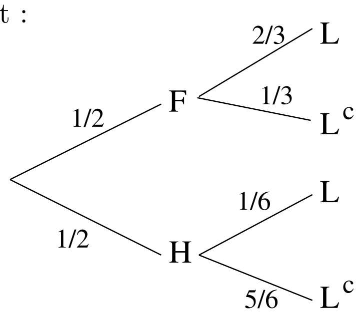
On voit qu'il y a 3 branches qui donnent exactement 2 fois le chiffre "6" (ces branches sont indiquées par des flèches à droite de l'arbre). Chacune de ces 3 branches est de probabilité $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{6^3}$. Les différentes branches correspondent à des évènements incompatibles (par construction de l'arbre), donc on fait la somme des probabilités de ces 3 branches, on obtient que la probabilité cherchée est $\frac{3 \times 5}{6^3}$.

b) Imaginons (sans le dessiner) l'arbre de tous les tirages possibles. Il y a 6 branches donnant 3 fois le même chiffre : les branches $- i - i - i$ avec $i \in \{1, 2, \dots, 6\}$. Chaque arête a une probabilité $\frac{1}{6}$, donc chacune de ces branches a une probabilité $\frac{1}{6^3}$. Les différentes branches correspondent à des évènements incompatibles, donc la probabilité cherchée est $6 \times \frac{1}{6^3} = \frac{1}{36}$.

Exercice 2. Soit Ω l'ensemble des personnes, F le sous-ensemble des femmes et H le sous-ensemble des hommes. Soit L l'évènement "avoir les cheveux longs". L'énoncé donne les probabilités suivantes : $P(F) = \frac{1}{2}$, $P(H) = \frac{1}{2}$, $P(L|F) = \frac{2}{3}$, $P(L|H) = \frac{1}{6}$.

a) On veut calculer $P(L)$. Comme F, H forment une partition de Ω, on a :
$P(L) = P(L|F)P(F) + P(L|H)P(H)$ (formule des probabilités totales).
D'où $P(L) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{12}$.
Conclusion : la proportion de personnes ayant des cheveux longs est $\frac{5}{12}$.
b) On veut calculer $P(F|L)$. On a $P(F|L) = \frac{P(F\cap L)}{P(L)}$ (définition d'une probabilité conditionnelle). On a déjà calculé $P(L)$. De plus, $P(F \cap L) = P(L|F)P(F) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$. Donc $P(F|L) = \frac{1/3}{5/12} = \frac{4}{5}$.
Conclusion : la probabilité pour qu'une personne prise au hasard parmi les personnes ayant des cheveux longs soit une femme est égale à $\frac{4}{5}$.

Autre méthode : on peut faire un arbre de probabilité (traduisant les probabilités conditionnelles). On obtient l'arbre suivant :



a) Les branches qui nous intéressent sont celles qui se terminent par L. La branche —F—L a pour probabilité $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ (c'est $P(F \cap L)$). La branche —H—L a pour probabilité $\frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$ (c'est $P(H \cap L)$). Les différentes branches correspondent à des évènements incompatibles (par construction de l'arbre), donc on fait la somme des probabilités des branches se terminant par L. On trouve $P(L) = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$ (c'est en fait la formule $P(L) = P(F \cap L) + P(H \cap L)$, dû au fait que F, H forment une partition de l'ensemble total).
b) En a), on a calculé grâce à l'arbre $P(F \cap L) = \frac{1}{3}$ et $P(L) = \frac{5}{12}$. On applique la formule $P(F|L) = \frac{P(F\cap L)}{P(L)}$ et on trouve $P(F|L) = \frac{1/3}{5/12} = \frac{4}{5}$.

Exercice 3. a) Dans un bouquet, on numérote les roses de 1 à 10. Soit $X_1, \dots, X_{10}$ les variables aléatoires valant 1 si la rose correspondante est fanée au bout de 3 jours, et 0 sinon. On a $X = X_1 + \cdots + X_{10}$. Par hypothèse, chaque X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = 0.05$, et les variables aléatoires $X_1, \dots, X_{10}$ sont indépendantes. Donc X suit une loi binomiale $B(10, 0.05)$.
$E(X_i) = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p$ et $E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_{10})$. Donc l'espérance de X est $E(X) = 10p = 0.5$.
b) La probabilité cherchée est $P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$ (aucune rose fanée, ou exactement une rose fanée). La formule de la loi binomiale donne :
$P(X \leq 1) = C_{10}^0 p^0(1 - p)^{10} + C_{10}^1 p^1(1 - p)^9 = 0.95^{10} + 10 \times 0.05 \times 0.95^9$.

Exercice 4. a) X et Y prennent leurs valeurs dans $\{0, 1\}$. Pour avoir $X + Y = 1$, il faut $(X, Y) = (0, 1)$ ou $(X, Y) = (1, 0)$. Donc :
$P(X + Y = 1) = P((X, Y) = (0, 1) \text{ ou } (X, Y) = (1, 0)) = P(X = 0, Y = 1) + P(X = 1, Y = 0)$
(les événements $\{(X, Y) = (0, 1)\}$ et $\{(X, Y) = (1, 0)\}$ sont disjoints).
L'indépendance de X et de Y donne $P(X = 0, Y = 1) = P(X = 0)P(Y = 1) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$ et $P(X = 1, Y = 0) = P(X = 1)P(Y = 0) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.
D'où $P(X + Y = 1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$.

b) $P(X = 1 \mid X + Y = 1) = \frac{P(X=1 \text{ et } X+Y=1)}{P(X+Y=1)}$ (définition d'une probabilité conditionnelle).
Pour avoir $X = 1$ et $X + Y = 1$, la seule possibilité est $(X, Y) = (1, 0)$. D'où
$P(X = 1 \mid X + Y = 1) = \frac{P(X=1,Y=0)}{P(X+1=1)} = \frac{1/4}{5/12} = \frac{3}{5}$.