Feuille d'exercices n° 3

Variables aléatoires à densité

Exercice 1. Bill va à la cantine entre 12h et 13h30, à une heure aléatoire. On suppose que son heure d'arrivée suit une loi uniforme. Sachant qu'à partir de 13h, il n'y a plus de mousse au chocolat parmi les desserts proposés, quelle est la probabilité pour qu'il y ait de la mousse au chocolat au moment où Bill passe à la cantine ?
Solution : réponse : 2/3.

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$ (c'est-à-dire que la densité de la loi de X est la fonction f telle que $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ si $x \geq 0$ et $f(x) = 0$ si $x < 0$). Montrer que $P(X > t + s | X > t) = P(X > s)$ pour tous $s, t \geq 0$.
Remarque : en raison de cette propriété, on dit que la loi exponentielle est sans mémoire. Cette loi modélise, entre autres, le temps de désintégration des atomes radioactifs.
Solution : $P(X > t + s \mid X > t) = \frac{P(X>t+s)}{P(X>t)}$. Or $P(X > y) = \displaystyle\int_y^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda y}$ si $y \geq 0$.
Donc $P(X > t + s \mid X > t) = \dfrac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = P(X > s)$.

Exercice 3. Soit X une variable aléatoire ayant une loi à densité f.
a) On fixe $a \in \mathbb{R}$. Que vaut $P(X = a)$?
b) On suppose que $P(X > 1) = 0.4$. En déduire $P(X \geq 1)$ et $P(X < 1)$.
Solution : a) $P(X = a) \int_a^a f(x)dx = 0$. *b)* $P(X \geq 1) = P(X = 1) + P(X > 1) = 0 + 0.4$. $P(X < 1) = 1 - P(X \geq 1) = 0.6$.

Exercice 4. Soit $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$.
a) Soit X une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Que vaut la probabilité $P(X > m)$?
b) Soit Y une variable aléatoire suivant une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. Quelle est la loi de $-Y$? quelle est la loi de $\sigma Y + m$?
c) En utilisant la table au verso, déterminer $P(0 \leq Y \leq 0.8)$, $P(-0.6 \leq Y \leq 0)$ et $P(Y \leq 0.8)$.
Solution : a) $P(X > m) = P(X < m)$ *par symétrie de la loi, et* $P(X = m) = 0$, *d'où* $P(X > m) = 1/2$.
b) $-Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $\sigma Y + m \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$
c) $P(0 \leq Y \leq 0.8) = 0.288$, $P(-0.6 \leq Y \leq 0) = P(0 \leq Y \leq 0.6) = 0.226$ *(symétrie),*
$P(Y \leq 0.8) = P(Y < 0) + P(0 \leq Y \leq 0.8) = 0.5 + 0.288 = 0.788$ *(*$P(Y < 0) = 0.5$ *: cf a).*

Exercice 5. Des machines fabriquent des crêpes destinées à être empilées dans des paquets de 10. Chaque crêpe a une épaisseur qui suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ avec $m = 0.6$mm et $\sigma^2 = 0.1$, et on suppose que les épaisseurs des différentes crêpes sont des v.a. indépendantes. Soit X la variable aléatoire « épaisseur du paquet en mm ».
a) Quelle est la loi de X ? quelle est son espérance ?
b) Calculez la probabilité pour que X soit compris entre 6,3 mm et 6,6 mm (*utiliser la table au verso*).
Solution : a) X *suit une loi normale* $\mathcal{N}(6, 1)$ *(somme de V.a. normales indépendantes, avec* $E(X) = 10 \times 0.6 = 6$ $\mathrm{Var}(X) = 10\sigma^2 = 1$*).*
b) Soit $Y = X - 6$. $P(6 \leq X \leq 6.6) = P(0 \leq Y \leq 0.6) = 0.226$. $P(6 \leq X \leq 6.3) = P(0 \leq Y \leq 0.3) = 0.118$, *donc* $P(6.3 \leq X \leq 6.6) = P(6 \leq X \leq 6.6) - P(6 \leq X \leq 6.3) = 0.108$.

Exercice 6. Une machine est conçue pour confectionner des paquets d'un poids de 500g, mais ils n'ont pas exactement tous le même poids. On a constaté que la distribution des poids autour de la valeur moyenne de 500g avait un écart-type de 25g.

a) Par quelle loi est-il raisonnable de modéliser le poids des paquets ?
b) On fait des lots de 1000 paquets. En moyenne, combien y a-t-il de paquets pesant entre 480g et 520g dans un lot ?
c) Dans un lot de 1000 paquets, combien y a-t-il en moyenne de paquets pesant plus de 450g ?
d) Trouver a tel qu'on ait 90% de chance pour qu'un paquet pris au hasard ait un poids compris entre $500 - a$ et $500 + a$.
Solution : a) L'énoncé suggère que le poids en grammes des paquets est une variable aléatoire qui suit une loi normale d'espérance 500 et d'écart-type 25. Soit X la variable aléatoire correspondante, et $Y = (X - 500)/25 \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
b) $P(480 \leq X \leq 520) = P(|Y| \leq 0.8) = 0.576$. *On s'attend donc à ce que, dans un lot de 1000, il y ait en moyenne 576 paquets dont le poids est compris entre 480g et 520g. C'est une moyenne, pas le nombre exact dans chaque lot. Plus précisément, c'est l'espérance de la variable aléatoire comptant le nombre de paquets de poids compris entre 480g et 520g dans un lot.*
c) $P(450 \leq X) = 0.5 + P(-2 \leq Y \leq 0) = 0.5 + \frac{1}{2}P(-2 \leq Y \leq 2) = 0.5 + 0.4772 = 0.9772$. *On s'attend donc à ce que, dans un lot de 1000, il y ait en moyenne 977 paquets dont le poids est supérieur à 450g.*
d) Il faut trouver t tel que $P(|Y| \leq t) = 0.9$. *La table donne* $t = 1.645$, *puis* $a = 25t \simeq 41$. *Par conséquent, environ 90% de la production a un poids compris entre* $500 - 41 = 459$*g et* $500 + 41 = 541$*g.*

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Exercice 7. Un transporteur aérien a observé que 10% en moyenne des personnes ayant acheté un billet ne se présentent pas au départ. L'avion dispose de 230 place. Le transporteur vend n billets avec $n > 230$. Soit X la variable aléatoire « nombre de personnes, parmi les n, qui se présentent au départ ». On suppose que les voyageurs ont des comportements indépendants.
a) Quelle est la loi exacte de X ? Par quelle loi peut-on l'approximer ?
b) Si $n = 240$, quelle est la probabilité que toutes les personnes qui se présentent au départ aient un siège ?
c) On veut que n soit tel qu'on soit sûr à 95% que tout le monde puisse monter dans l'avion, c'est-à-dire $P(X \leq 230) \geq 0.95$. Quelle inégalité doit vérifier n ? Trouver le nombre n maximal en le cherchant entre 240 et 250.
Solution : a) Le nombre X de clients qui se présentent au départ est la somme de n variables de Bernoulli indépendantes, donc il suit une loi binomiale $B(n, 0.9)$. *On approxime la loi de X par la loi normale de même espérance et même variance. Les conditions nécessaires d'approximation sont satisfaites (*$n > 50$*).*
b) $E(X) = np = 216, Var(X) = np(1-p) = 21.6$. *Soit* $R = (X - 216)/\sqrt{21.6})$ *la variable centrée réduite correspondante. L'évènement A = "toutes les personnes présentes au départ ont un siège" s'écrit* $A = \{X \leq 230\} \sim \{R \leq 14/\sqrt{21.6} \simeq 3.01)$. *La table de la loi normale donne* $p(A) \sim 0.9987$.
c) Soit $R = (X - np)/\sqrt{np(1-p)}$ *la variable centrée réduite correspondante.*
$P[X \leq 230] \geq 0.95$ *si* $P(R \leq \frac{230-np}{\sqrt{np(1-p)}}) \geq 0.95 = 0.5 + 0.45$. *La table donne* $\frac{230-np}{\sqrt{np(1-p)}} \geq 1.645$.
On n'a plus qu'à résoudre l'inéquation :

$$(*) \quad \frac{230 - 0.9n}{\sqrt{0.09n}} \geq 1.645.$$

(*) vaut 2.0 pour $n = 245$, *0.83 pour* $n = 246$, *1.63 pour* $n = 247$, *1.05 pour* $n = 250$. *Donc le n maximal est* $n = 246$.

Exercices supplémentaires

Exercice 8. Soit X une v.a. de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. Calculer $E(X)$.
Solution : $E(X) = \lambda \int_0^{+\infty} xe^{-\lambda x}\, dx = \frac{1}{\lambda}$ *via une intégration par parties.*

Exercice 9. On suppose qu'il y a une probabilité égale à $p = 0,1$ d'être contrôlé lorsqu'on prend le tram. Monsieur A fait $n = 700$ voyages par an sur cette ligne.
a) Quelle est la probabilité que Monsieur A soit contrôlé entre 60 et 80 fois dans l'année ?
b) En fait, Monsieur A voyage toujours sans ticket. Sachant que le prix d'un ticket de tram est de 1,12 euros, quelle amende minimale la compagnie doit-elle fixer pour que ce fraudeur ait, sur une période d'une année, une probabilité supérieure à 0.75 d'être perdant ? (donner un montant en euros sans centimes).
Solution : a) Pour calculer la probabilité que Monsieur A soit contrôlé entre 60 et 80 fois dans l'année, posons X *le nombre de contrôles comme une variable aléatoire. Elle obéit à une loi binomiale* $B(700; 0.1)$ *(*$E = 70, Var = np(1-p) = 63$*). On peut l'approcher par la loi normale* $N(70; 63)$*. Soit* $Y = \frac{X-70}{\sqrt{63}}$*.* $P[60 \leq X \leq 80] = P[-10/\sqrt{63} \leq Y \leq 10/\sqrt{63}]$ *avec* $10/\sqrt{63} \simeq 1.26$*. D'où* $P[60 \leq X \leq 80] \simeq 0.79$*. (ou* $P[59.5 \leq X \leq 80.5] = P[|Y| \leq 10.5/\sqrt{63} \simeq 1.32] \simeq 0.81$*).*
b) Calculons le prix que devrait payer le voyageur : $1,12 \times 700 = 784$ *euros. Il est perdant si l'amende dépasse ce prix. Or l'amende est* aX*, si* a *est l'amende fixée par la compagnie. On cherche donc* a *pour que* $P[aX \geq 784] \geq 0.75$*, autrement dit* $P[aX \leq 784] \leq 0.25$*. Soit* a_0 *tel que* $P[a_0X \leq 784] = 0.25$*. La loi de* a_0X *est approchée par* $N(a_0m, (a_0\sigma)^2)$*. On a* $\frac{a_0X - a_0m}{a_0\sigma} = Y$*.* $P(a_0X \leq 784) = P(Y \leq \frac{784/a_0 - m}{\sigma})$*. Par lecture de table,* $P(Y \leq t) = 0,25$ *pour* $t = -0.68$*. D'où* $a_0 = \frac{784}{-0.68\sigma + m} \simeq 12.1$ *Il faut que l'amende dépasse 13 euros.*

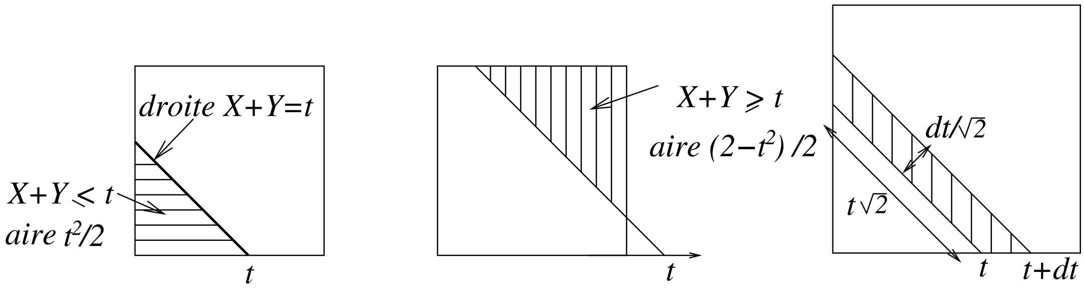
Exercice 10. Soient X_1, X_2, X_3, trois variables aléatoires indépendantes, de loi normale, telles que $E(X_1) = 100$, $\mathrm{Var}(X_1) = 100$, $E(X_2) = 20$, $\mathrm{Var}(X_2) = 4$, $E(X_3) = 50$, $\mathrm{Var}(X_3) = 25$. On pose $Y = X_1 + 2X_2 - X_3$. Déterminer $E(Y)$ et $\mathrm{Var}(Y)$. Quelle est la loi de Y ?
Solution : $E(Y) = E(X_1) + 2E(X_2) - E(X_3) = 90$*. Par indépendance,* $\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(2X_2) + \mathrm{Var}(-X_3)$*. D'où* $\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(X_1) + 4\mathrm{Var}(X_2) + \mathrm{Var}(X_3) = 141$*. Une somme de lois normales indépendantes est une loi normale, donc la loi de* Y *est le loi normale* $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ *avec* $m = E(Y) =$ *et* $\sigma^2 = \mathrm{Var}(Y)$ *calculés juste avant.*

Exercice 11. La *fonction de répartition* d'une variable aléatoire X est la fonction $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ définie par $F_X(t) = P(X \leq t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
On a la propriété suivante (admise) : la fonction de répartition caractérise la loi d'une variable aléatoire ; autrement dit, si $F_X = F_Y$, alors X et Y ont la même loi.
a) Déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire X de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, où $\lambda > 0$. Exprimer $P(X > t)$ à l'aide de $F_X(t)$.
b) Soit X, Y des variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. On pose $Z = \min(X, Y)$. Déterminer $P(Z > t)$ et en déduire la fonction de répartition de Z. Puis en déduire la loi de Z.
Solution : a) $F_X(t) = 1 - \lambda e^{-\lambda t}$ *si* $t \geq 0$ *et* $F_X(t) = 0$ *sinon.* $P(X > t) = 1 - F_X(t)$*.*
b) $P(Z > t) = P(X > t, Y > t) = P(X > t)P(Y > t)$ *par indépendance. D'où* $1 - F_Z(t) = (1 - F_X(t))(1 - F_Y(t))$*. Comme* $F_X(t) = F_Y(t)$*, on trouve que* $F_Z(t) = 1 - 2\lambda e^{-2\lambda t}$ *si* $t \geq 0$ *et* $F_Z(t) = 0$ *sinon. Par conséquent,* Z *est de loi exponentielle de paramètre* 2λ*.*

Exercice 12. Soit X et Y des v.a. indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$ et $Z = X + Y$.
a) Si on représente graphiquement (X, Y) par un carré, comment sont représentés les événements $\{Z = t\}$, $\{Z \leq t\}$, $\{Z \in [t, t + dt]\}$?
b) En vous aidant de la représentation graphique, calculer la loi de Z.
Solution : a) On prend comme modèle $\Omega = [0, 1]^2$*,* $X(x, y) = x$*,* $Y(x, y) = y$*. On peut alors représenter* $Z = t$ *par la droite d'équation* $x + y = t$ *dans le carré (figure de gauche).*

b) Si $0 \leq t \leq 1$ alors $F_Z(t) = P(X+Y \leq t) = \frac{t^2}{2}$ (figure de gauche). Si $1 \leq t \leq 2$, alors $F_Z(t) = 1 - \frac{(2-t)^2}{2}$ (figure du milieu). Si $t < 0$ alors $F_Z(t) = 0$ et si $t > 2$ alors $F_Z(t) = 1$.
F_Z est continue sur $\mathbb{R}$, C^1 par morceaux, on peut donc dériver pour obtenir f_Z la densité de Z : $f_Z(t) = t$ si $0 \leq t \leq 1$, $f_Z(t) = 2-t$ si $1 \leq t \leq 2$, $f_Z(t) = 0$ sinon.

On peut également calculer la densité directement, "à la physicienne", en considérant dt comme un tout petit accroissement (on l'a dessiné assez gros pour rendre le dessin lisible). Sur la figure de droite, on a dessiné $X+Y \in [t, t+dt]$ pour $0 \leq t \leq 1$. L'aire de la partie hachurée est à peu près $t\sqrt{2} \times \frac{dt}{\sqrt{2}}$ (longueur $\times$ largeur), donc on a $P(t \leq X+Y \leq t+dt) = tdt$. Or $P(t \leq Z \leq t+dt) = f_Z(t)dt$, ce qui donne la densité $f_Z(t) = t$ pour $0 \leq t \leq 1$. On fait pareil pour $1 \leq t \leq 2$.



Exercice 13. Soit X une v.a. de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. Que vaut $E(|X-1|)$?

Table (partielle) pour une v.a. X de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$

t	$P(0 \leq X \leq t)$	$P(-t \leq X \leq t)$
0.3	0.118	0.236
0.6	0.226	0.451
0.68	**0.25**	**0.5**
0.8	0.288	0.576
1.26	0.396	0.792
1.32	0.407	0.813
1.645	0.45	**0.90**
1.96	0.475	**0.95**
2	0.477	0.954
3	0.499	0.997