Feuille d'exercices n° 2

Loi d'une variable aléatoire discrète

Exercice 1. On lance deux dés à 6 faces (non pipés). Déterminer la loi de la variable aléatoire donnant le maximum des deux chiffres obtenus.
Solution : Soit $X = (X_1, X_2)$ la v.a. donnant le résultat des 2 dés. On a $P(X = (i,j)) = \frac{1}{36}$ pour tout $(i,j) \in \{1,\dots,6\}^2$. On cherche la loi de $Y = \max(X_1, X_2)$, qui prend ses valeurs dans $\{1,\dots,6\}$. En énumérant les cas (par exemple en faisant un tableau donnant Y en fonction de X_1 et X_2), on trouve la loi de Y :

x	1	2	3	4	5	6
$P(Y=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

Exercice 2. Soit n un entier strictement positif. Quelle est la loi du nombre de garçons dans une famille de n enfants ? (Préciser les hypothèses que vous avez faites)
Solution : Hypothèses : chaque enfant est un garçon ou une fille avec la même proba ($\frac{1}{2}$), et les sexes des différents enfants sont indépendants. Sous ces hypothèses, la loi du nombre de garçons dans une famille de n enfants est une loi binomiale $B(n, \frac{1}{2})$ (c'est la somme de n v.a. indépendantes de loi de Bernoulli $b(\frac{1}{2})$).

Exercice 3. Une usine fabrique des transistors. Chaque transistor a une probabilité de 3% d'être défectueux. Quelle est la loi du nombre de transistors défectueux dans un lot de 100 transistors ? Que vaut son espérance et que représente-t-elle ?
Solution : On suppose que les transistors sont défectueux ou non de façon indépendante. La loi du nombre de transistors défectueux dans un lot de 100 est une loi binomiale $B(n,p)$ avec $n = 100$ et $p = 0,03$ (c'est la somme de n v.a. indépendantes de loi de Bernoulli $b(p)$). L'espérance vaut $np = 3$.

Exercice 4. L'entreprise Luminex fabrique des lampes, dont 80% durent plus de 3000 heures. Des tests sont effectués sur des échantillons de taille $n = 15$.
a) Quelle est le nombre moyen de lampes qui ont une durée de vie inférieure à 3000 heures dans un échantillon de taille 15 ?
b) Quelle est la probabilité que toutes les lampes de l'échantillon durent plus de 3000 heures ?
c) Quelle est la probabilité que 13 lampes ou plus, dans un échantillon de taille 15, durent plus de 3000 heures ?
Solution : a) Une lampe tirée au hasard a une probabilité de 0.2 d'avoir une durée de vie inférieure à 3000 heures. Le nombre X de lampes qui ont une durée de vie inférieure à 3000 heures dans un échantillon de taille 15 tiré au hasard est la somme de 15 variables de Bernoulli de paramètre $p = 0.2$. Par conséquent, il suit une loi binomiale $B(15, 0.2)$. Son espérance vaut $E(X) = 15 \times 0.2 = 3$.
b) C'est $P(X=0) = \binom{15}{0}(0.2)^0(0.8)^{15} \simeq 0.0352.$
c) C'est $P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = \binom{15}{0}(0.2)^0(0.8)^{15} + \binom{15}{1}(0.2)^1(0.8)^{14} + \binom{15}{2}(0.2)^2(0.8)^{13} \simeq 0.0352 + 0.1319 + 0.2309 \simeq 0.398.$

Exercice 5. Un standard téléphonique reçoit en moyenne 2 appels par minute. Les appels sont répartis au hasard dans le temps.
a) Quel type de loi est adapté pour modéliser le nombre d'appels pendant un temps donné ?

b) Quelle est la loi de probabilité régissant le nombre d'appels reçus en 3 minutes ? Quelle est la probabilité qu'il n'y ait aucun appel en 3 minutes ?
c) Quelle est la probabilité que le nombre d'appels en 2 minutes soit supérieur ou égal à 5 ?
Solution : a) Loi de Poisson de paramètre $2t$ *si* t *est le temps en minutes.*
b) C'est une loi de Poisson de paramètre 6 : $P(X=n)=e^{-6}.\frac{6^n}{n!}$. *La probabilité qu'il n'y ait aucun appel est* $P(X=0)=e^{-6}\simeq 0.002$.
c) Soit Y *la variable aléatoire "Nombre d'appels reçus en 2 minutes". Alors* Y *suit une loi de Poisson de paramètre 4. La probabilité qu'il y ait entre 0 et 4 appels est* $P(Y=0)+P(Y=1)+P(Y=2)+P(Y=3)+P(Y=4)\simeq 0.629$. *Donc* $P(Y\geq 5)=1-P(Y\leq 4)\simeq 0.371$.

Exercice 6. Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p.
a) Rappeler ce que modélise une loi géométrique.
b) Montrer que, pour tout entier $n\geq 0$, $P(X>n)=(1-p)^n$.
c) Montrer que, pour tous entiers $n,m\geq 0$, $P(X>n+m\mid X>n)=P(X>m)$.
Remarque : en raison de cette propriété, on dit que la loi géométrique est sans mémoire (en tant que v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$*).*
Solution : a) Loi géométrique : on considère une expérience à 2 issues (succès/échec) ; si on répète cette expérience (de façon indépendante) jusqu'à obtenir une 1er succès, le nombre d'expériences suit une loi géométrique de paramètre p*, où* p *est la proba de succès d'une expérience. Loi :* $P(X=n)=(1-p)^n p$ *pour tout* $n\in\mathbb{N}^*$.
b) $P(X>n)=\sum_{k=n+1}^{+\infty}(1-p)^{k-1}p=p(1-p)^n\sum_{i=0}^{+\infty}(1-p)^i=p(1-p)^n\frac{1}{1-(1-p)}=(1-p)^n$.
c) $P(X>n+m|X>n)=\frac{P(X>n+m)}{P(X>n)}=\frac{(1-p)^{n+m}}{(1-p)^n}$ *par b) (noter que* $\{X>n+m\}\cap\{X>n\}=\{X>n+m\}$*). D'où* $P(X>n+m|X>n)=(1-p)^m=P(X>m)$.

Exercices supplémentaires

Exercice 7. Le tableau ci-dessous donne la loi d'un couple de variables aléatoires $Z=(X,Y)$, avec X prenant ses valeurs dans $\{-1,1\}$ et Y prenant ses valeurs dans $\{-1,0,1\}$.

	$Y=-1$	$Y=0$	$Y=1$
$X=-1$	1/12	1/3	1/12
$X=1$	1/6	1/6	1/6

a) Déterminer la probabilité que X et Y soient égales.
b) Déterminer les lois de X et de Y.
c) Déterminer les lois de $X+Y$ et de XY.
Solution : a) $P(X=Y)=P((X,Y)=(-1,-1))+P((X,Y)=(1,1))=1/12+1/6=1/4$.
b) La loi de X *est obtenue en faisant la somme par ligne, celle de* Y *en faisant la somme par colonne.*

	$Y=-1$	$Y=0$	$Y=1$	*loi de* X
$X=-1$	1/12	1/3	1/12	**1/2**
$X=1$	1/6	1/6	1/6	**1/2**
loi de Y	**1/4**	**1/2**	**1/4**	

c) Valeur de $X+Y$ *en fonction des valeurs de* X *et de* Y *:*

	$Y=-1$	$Y=0$	$Y=1$
$X=-1$	-2	-1	0
$X=1$	0	1	2

D'où la loi de $X+Y$ *:*

a	-2	-1	0	1	2
$P(X+Y=a)$	1/12	1/3	$1/12+1/6=1/4$	1/6	1/6

loi de XY :

a	-1	0	1
$P(XY=a)$	$1/6+1/12=1/4$	$1/3+1/6=1/2$	$1/6+1/12=1/4$

Exercice 8. Un candidat se présente à un concours où 20 questions sont données sous forme de QCM. A chaque question, sont proposées 4 réponses, une seule étant exacte. L'examinateur fait le compte des réponses exactes données par les candidats. Certains candidats répondent au hasard à chaque question ; pour ceux-là, définir une variable aléatoire donnant le nombre de réponses exactes et donner sa loi de probabilité ainsi que son espérance.
Solution : Puisque les réponses sont données au hasard, chaque grille-réponses est en fait la répétition indépendante de 20 *épreuves aléatoires (il y a* 4^{20} *grilles-réponses). Pour chaque question la probabilité de succès est de* $\frac{1}{4}$ *et l'examinateur fait le compte des succès : la variable aléatoire* X*, nombre de bonnes réponses, obéit à une loi binomiale* $B(20,1/4)$ *donc on a directement les résultats. Pour toute valeur de* k *comprise entre* 0 *et* 20 *:* $P(X=k)=\begin{pmatrix}k\\20\end{pmatrix}(\frac{1}{4})^k(1-\frac{1}{4})^{20-k}$*, ce qui donne la loi de cette variable aléatoire.*
L'espérance d'un candidat répondant au hasard est $E(X)=np=5$*.*

Exercice 9. Un transporteur aérien a observé que 25% en moyenne des personnes ayant réservé un siège pour un vol ne se présentent pas au départ. Il décide d'accepter jusqu'à 23 réservations alors qu'il ne dispose que de 20 sièges pour ce vol.
a) Soit X la variable aléatoire « nombre de clients qui viennent après réservation quand 23 places ont été réservées ». Quelle est la loi de X (précisez les hypothèses que vous faites pour modéliser la situation) ? Quelle est son espérance ?
b) Si 23 personnes ont réservé, quelle est la probabilité que toutes les personnes qui se présentent au départ aient un siège ?
Solution : a) La loi de X *est une loi binomiale de paramètres* $n=23$*,* $p=0.75$ *:* $P(X=k)=\begin{pmatrix}k\\n\end{pmatrix}p^k(1-p)^{n-k}$ *si* $0\le k\le n$*. Son espérance est* $np=17.25$*.*
b) $P(X\le 20)=1-P(X=21,22 \text{ ou } 23)\simeq 0.951$*.*

Exercice 10. On lance 10 fois une pièce supposée bien équilibrée. On désigne par X la fréquence du nombre de fois où « pile » a été obtenu (c'est-à-dire le nombre de « pile » divisé par 10).

a) Quelle est la loi de X ? que vaut $E(X)$?

b) Que vaut $P(0.4\le X\le 0.6)$?

c) Déterminer le plus petit entier $a>0$ telle que la probabilité que X soit dans l'intervalle $\left[0.5-\frac{a}{10},0.5+\frac{a}{10}\right]$ soit supérieure à 95%, c'est-à-dire $P(0.5-\frac{a}{10}\le X\le 0.5+\frac{a}{10})\ge 0,95$.
Solution : a) $X=Y/10$ *où* Y *est de loi* $B(10,1/2)$ *(*Y *= nombre de "pile").*
b) $P(0.4\le X\le 0.6)=P(4\le Y\le 6)=P(Y=4,5 \text{ ou } 6)\simeq 0.656$*.*
c) $P(3\le Y\le 7)\simeq 0.891$*.* $P(2\le Y\le 8)\simeq 0.978$*. Donc* $a=3$*.*

Exercice 11. Dans une dictature militaire, le dictateur veut augmenter le nombre de naissances de garçons. Il impose la règle suivante : si une femme donne naissance à une fille, elle doit continuer à faire des enfants ; si elle donne naissance à un garçon, elle doit arrêter d'avoir des enfants. On suppose que chaque femme a au moins un enfant et pas plus de 5 enfants.
a) Soit X le nombre de filles par femme. Quelle est la loi de X ?
b) Quel est le nombre moyen de filles d'une femme ? Le nombre moyen de garçons ? Cette règle est-elle efficace pour augmenter le nombre de garçons ?
Solution : a) $X+1$ *suit une loi géométrique tronquée de paramètre* $p=0.5$ *:* $P(X=k)=0.5^k0.5=0.5^{k+1}$ *si* $0\le k\le 4$*,* $P(X=5)=0.5^5$*.*
b) $E(X)=\sum_{0\le k\le 5}kP(X=k)=\frac{1}{4}+2\frac{1}{8}+3\frac{1}{16}+4\frac{1}{32}+5\frac{1}{32}=0.96875$*.*

Y = nombre de garçons. Il y a exactement 1 garçon sauf s'il y a 5 filles. $P(Y=0)=0.5^5=1/32$. $E(Y)=P(Y=1)\times 1=0.96875$. $E(X)=E(Y)$, donc pas efficace.

Exercice 12. La proportion de centenaires en France est de 3 pour 10 000 habitants.
a) Quelle est la loi du nombre de centenaires parmi n personnes ? Si $n\geq 100$, par quelle autre loi peut-on approximer cette loi ?
b) Quelle est la probabilité de trouver au moins un centenaire parmi 500 personnes choisies au hasard ?
c) Quelle est la probabilité de trouver exactement 3 centenaires parmi 10 000 personnes ?
Solution : a) C'est une loi binomiale $B(n,p)$ avec $p=\frac{3}{10000}$. La probabilité p étant faible devant n, on peut approximer la loi binomiale $B(n,p)$ par la loi de Poisson d'espérance np (il est d'usage d'approximer $B(n,p)$ par $\mathcal{P}(np)$ quand $n\geq 50$ et $np\leq 5$).
b) Pour $n=500$, $np=0.15$. Soit X nombre X de centenaires pris parmi 500 personnes. On a : $P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-e^{-0.15}\simeq 0.139$ avec la loi de Poisson $\mathcal{P}(0.15)$.
c) Sur un groupe de $10\,000$ personnes : l'espérance est $np=3$ donc, avec la loi de Poisson $\mathcal{P}(3)$, on trouve $P(X'=3)=e^{-3}\times\frac{3^3}{3!}\simeq 0.224$.
Remarque : dans les 2 cas, les calculs peuvent se faire directement avec la loi binomiale, ça ne dépasse pas la puissance de calcul d'une calculatrice (et on trouve le même résultat).

Exercice 13. Charles n'a pas de chat et a au plus un chien. Sophie n'a pas de chien et a au plus un chat. La probabilité pour que Charles ait un chien est de 0.2. Si Charles n'a pas de chien, la probabilité pour que Sophie ait un chat est de 0.1. On note X le nombre de chiens de Charles et Y le nombre de chats de Sophie.

a) Calculer la probabilité pour qu'ils n'aient pas d'animaux.

Soit Z le nombre d'animaux du couple. On suppose que $P(Z=1)=0.1$.
b) Calculer la probabilité pour que Z soit égal à 2.
c) Établir la loi de probabilité du couple (X,Y). Quelle est la loi de probabilité de Y ?
d) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
Solution : a) Soit A l'évènement "Charles n'a pas de chien" et B l'évènement "Sophie n'a pas de chat". L'énoncé donne $P(B|A)=0.9$. Par conséquent, la probabilité pour que le ménage n'ait aucun animal est $P(A\cap B)=P(B|A)P(A)=0.9\times 0.8=0.72$.
b) Z ne peut prendre que les valeurs 0, 1 et 2. L'évènement $\{Z=0\}$ coïncide avec $A\cap B$, donc $P(Z=0)=0.72$. Il vient $P(Z=2)=1-P(Z=0)-P(Z=1)=1-0.72-0.1=0.18$.
c) On calcule
- $P(X=0$ *et* $Y=0)=P(Z=0)=0.72$,
- $P(X=1$ *et* $Y=1)=P(Z=2)=0.18$,
- $P(X=0$ *et* $Y=1)=P(A\cap B^c)=P(B^c|A)P(A)=(1-P(B|A))P(A)=0.1\times 0.8=0.08$.

On complète le tableau en utilisant le fait que le somme des probabilités des évènements élémentaires vaut 1.

	$Y=0$	$Y=1$	*Total*
$X=0$	*0.72*	*0.08*	*0.8*
$X=1$	*0.02*	*0.18*	*0.2*
Total	*0.74*	*0.26*	*1*

La dernière ligne du tableau donne la loi de Y : $P(Y=0)=0.74$ et $P(Y=1)=0.26$.
d) On constate par exemple que $P(X=1$ et $Y=1)=0.18$ n'est pas égal à $P(X=1)P(Y=1)=0.2\times 0.26=0.052$, donc X et Y ne sont pas indépendantes.