# Feuille d'exercices n° 1

## Espaces de probabilité

**Exercice 1.** On lance deux dés à 6 faces (non pipés). On note le nombre de points (1, 2, 3, 4, 5 ou 6) qui apparaît sur la face supérieure de chaque dé. Décrire l'ensemble $\Omega$ des résultats possibles et la probabilité $P$ associée à cette expérience. Donner la probabilité d'obtenir :
a) un double,
b) exactement un nombre pair,
c) au plus un nombre pair,
d) deux nombres qui se suivent.
*Solution :* $\Omega = \{(i,j) \mid i,j \in \{1,2,\dots,6\}\}$, *proba uniforme* ($P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$).
*a)* $P(\text{un double}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.
*b)* $P(\text{exactement un nombre pair}) = P(\{1,3,5\} \times \{2,4,6\} \cup \{2,4,6\} \times \{1,3,5\}) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.
*c)* $P(\text{au plus un nombre pair}) = P(\text{exactement un pair}) + P(\text{2 impairs}) = \frac{1}{2} + \frac{9}{36} = \frac{3}{4}$ *(on décompose en 2 évènements incompatibles).*
*d)* $P((1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,6),(2,1),(3,2),(4,3),(5,4),(6,5)) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$.

**Exercice 2.** On considère $\Omega = \{1,2,3,4\}$. Parmi les choix suivants, quels sont ceux qui donnent une probabilité $P$ sur $\Omega$ ?

| | |
|---|---|
| *a)* | $P(1) = 1/4, \quad P(2) = 3/8, \quad P(3) = 1/16, \quad P(4) = 3/16.$ |
| *b)* | $P(1) = 0, \quad P(2) = 1/3, \quad P(3) = 1/6, \quad P(4) = 1/2.$ |
| *c)* | $P(1) = 1/5, \quad P(2) = 1/4, \quad P(3) = 1/3, \quad P(4) = 1/2.$ |
| *d)* | $P(1) = 1/4, \quad P(2) = 1/2, \quad P(3) = -1/4, \quad P(4) = 1/2.$ |

*Solution : a) non, somme* $< 1$, *b) oui, c) non, somme* $> 1$, *d) non,* $P(3) < 0$.

## Indépendance, probabilités conditionnelles

**Exercice 3.** Aurore arrive en retard en cours avec une probabilité $\frac{1}{2}$. Elle ne va pas en cours avec une probabilité $\frac{1}{4}$. Aujourd'hui, le cours commence sans elle. Quelle est la probabilité qu'elle vienne aujourd'hui ?
*Solution : Soit* $A$ *l'évènement "Aurore vient en cours" et* $B$ *"Aurore n'est pas là au début du cours". On cherche* $P(A|B)$. *On écrit* $B = B_1 \cup B_2$ *avec* $B_1$ *="Aurore ne vient pas" et* $B_2$ *="Aurore vient en retard". Par l'énoncé,* $P(B_1) = \frac{1}{4}$ *et* $P(B_2) = \frac{1}{2}$. $B_1, B_2$ *sont incompatibles, d'où* $P(B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$. *On a* $A \cap B = B_1$. *Finalement* $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$.

**Exercice 4.** Deux chasseurs aperçoivent simultanément un lapin et tirent en même temps. La probabilité que le premier tue le lapin est 4/5, celle du second est 3/4. Quelle est la probabilité que le lapin soit tué ?
*Solution : Soit* $A_i$ *l'évènement "le i-ème chasseur tue le lapin". L'énoncé donne* $P(A_1) = 4/5$, $P(A_2) = 3/4$ *et suggère que* $A_1$ *et* $A_2$ *sont indépendants. Il en est de même pour les évènements contraires. La probabilité de survie du lapin est donc* $P(A_1^c \cap A_2^c) = P(A_1^c)P(A_2^c) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$, *et la probabilité que le lapin soit tué est* $1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20}$.

**Exercice 5.** Une personne lance deux dés à 6 faces (non pipés) et dit qu'elle a obtenu au moins un nombre pair. Quelle est la probabilité que les deux nombres obtenus soient pairs ?
*Solution : Soit* $A$ *="2 pairs" et* $B$ *="au moins un pair". On cherche* $P(A|B)$. $P(B^c) = P(\text{2 impairs}) = \frac{1}{4}$, *donc* $P(B) = \frac{3}{4}$. $P(A) = \frac{1}{4}$ *et* $A \subset B$. *D'où* $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$.

**Exercice 6.** On a décelé une probabilité de 0,01 pour qu'un enfant soit atteint par une maladie M. La probabilité qu'un enfant qui n'est pas atteint par M ait une réaction négative à un test est de 0,9. S'il est atteint par M, la probabilité qu'il ait une réaction positive à ce test est de 0,95.
Quelle est la probabilité qu'un enfant pris au hasard ait une réaction positive au test ? Quelle est la probabilité qu'un enfant pris au hasard et ayant une réaction positive soit atteint par M ?
*Solution : On note $A$ l'événement "l'enfant a la maladie M", $A^c$ l'événement "l'enfant n'a pas la maladie M", $B$ l'événement "l'enfant a une réaction positive au test", $B^c$ l'événement "l'enfant a une réaction négative au test". D'après l'énoncé,* $P(A) = 0,01$ *(donc* $P(A^c) = 0,99$, $P(B^c|A^c) = 0,9$*) et* $P(B|A) = 0,95$*. Pour la 1ère question, on cherche* $P(B)$ *:*

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c) \\ &= P(B|A)P(A) + (1 - P(B^c|A^c))P(A^c) = 0,0095 + 0,099 = 0,1085. \end{aligned}$$

*La probabilité qu'un enfant pris au hasard et ayant une réaction positive soit atteint par M est donnée par* $P(A|B) = \frac{P(B\cap A)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{95}{1085} \simeq 0.088$*. Un tel test serait d'une utilité discutable.*

### Probabilités d'un événement, dénombrement

**Exercice 7.** On tire simultanément 5 cartes dans un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité d'avoir exactement 3 rois ?
*Solution : Il y a* $\binom{32}{5}$ *tirages équiprobables, et* $\binom{4}{3}\binom{28}{2}$ *cas favorables (choisir 3 rois parmi 4 rois, et choisir 2 cartes parmi les* $32-4$ *cartes qui ne sont pas des rois). Probabilité cherchée :*
$\dfrac{\binom{4}{3}\binom{28}{2}}{\binom{32}{5}}$.

**Exercice 8.** Une urne contient une boule rouge, 3 boules vertes et 16 boules blanches. La boule rouge permet de gagner 10 euros, chaque boule verte permet de gagner 5 euros et les boules blanches ne rapportent rien. Un joueur tire simultanément 3 boules.
a) Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge et 2 boules blanches ?
b) Quelle est la probabilité pour que ce joueur gagne exactement 10 euros ?
*Solution : Ici l'univers* $\Omega$ *est l'ensemble des combinaisons de 3 boules, i.e. l'ensemble des parties à 3 éléments d'un ensemble de 20 boules. Les* $\binom{20}{3} = \frac{20.19.18}{3!} = 1140$ *combinaisons sont équiprobables.*
*a) On note $A$ l'évènement "tirer 1 boule rouge et 2 boules blanches". Les éléments de l'évènement $A$ sont les combinaisons formées de la boule rouge et d'une combinaison de 2 boules blanches. Il y en a* $\binom{16}{2} = \frac{16.15}{2!} = 120$*. Par conséquent,* $P(A) = \frac{120}{1140}$.
*b) Pour gagner 10 euros, il faut avoir tiré exactement une boule rouge et 2 boules blanches (évènement $A$), ou 2 boules vertes et 1 boule blanche (évènement $B$). Les évènements $A$ et $B$ sont incompatibles. Les éléments de l'évènement $B$ sont les combinaisons formées d'une combinaison de deux boules vertes et d'une boule blanche. Il y en a* $\binom{3}{2}\binom{16}{1} = 3.16 = 48$*. Par conséquent,* $P(B) = \frac{48}{1140}$*. La probabilité de gagner 10 euros est donc égale à* $P(A) + P(B) = \frac{168}{1140} \simeq 0.147$.
*On peut aussi faire un arbre de probabilité pour résoudre cet exercice, mais attention au fait que l'ordre des tirages compte dans un arbre.*

## Exercices supplémentaires

**Exercice 9.** Dans la salle des profs du collège, 60% sont des femmes ; une femme sur trois porte des lunettes et un homme sur deux porte des lunettes. Quelle est la probabilité pour qu'un porteur de lunettes pris au hasard soit une femme ?
*Solution :* $F = \{femmes\}$, $H = F^c = \{hommes\}$, $L = \{lunettes\}$. *On cherche* $P(F|L)$.
*L'énoncé donne* $P(F) = 0,6$ *(donc* $P(H) = 1 - P(F) = 0,4$*),* $P(L|F) = \frac{1}{3}$, $P(L|H) = \frac{1}{2}$.
$P(F \cap L) = P(L|F)P(F) = \frac{1}{3} \times 0,6 = 0,2$.
$P(L) = P(L|F)P(F) + P(L|H)P(H) = \frac{1}{3} \times 0,6 + \frac{1}{2} \times 0,4 = 0,4$. *Donc* $P(F|L) = \frac{P(F\cap L)}{P(L)} = \frac{1}{2}$.
*On peut aussi faire un arbre de probabilité pour trouver* $P(F \cap L)$ *et* $P(L)$.

**Exercice 10.** En cas de migraine, trois patients sur cinq prennent de l'aspirine, deux sur cinq prennent un médicament M présentant davantage d'effets secondaires. Avec l'aspirine, 75% des patients sont soulagés. Avec le médicament M, 90% des patients sont soulagés.
a) Quel est le taux global de personnes soulagées ?
b) Quel est la probabilité pour un patient d'avoir pris de l'aspirine sachant qu'il est soulagé ?
*Solution :* $A =$*"prendre de l'aspirine"*, $M = A^c =$*"prendre le médicament M"*, $S =$*"être soulagé". L'énoncé donne* $P(A) = \frac{3}{5}$, $P(M) = \frac{2}{5}$, $P(S|A) = 0,75$, $P(S|M) = 0,9$.
*a)* $P(S) = P(S|A)P(A) + P(S|M)P(M) = 0,75 \times \frac{3}{5} + 0,9 \times \frac{2}{5} = 0,81$.
*b)* $P(A|S) = \frac{P(A\cap S)}{P(S)} = \frac{P(S|A)P(A)}{P(S)} = \frac{0,75\times\frac{3}{5}}{0,81} = \frac{5}{9} \simeq 0,555$.
*On peut aussi faire un arbre de probabilité pour trouver* $P(A \cap S)$ *et* $P(S)$.

**Exercice 11.** On lance trois dés à 6 faces (non pipés). Calculer la probabilité d'avoir :
a) trois 3.
b) deux 2 et un 1.
c) un 1, un 3, un 5.
d) la somme des points égale à 9.
e) la somme des points égale à 10.
*Remarque : Les calculs d) et e) ont été effectués à l'origine par Galilée pour montrer qu'on obient des probabilités différentes dans ces deux cas.*
*Solution : a) Dés non pipés signifie que la probabilité de tirer 3 (ou tout autre chiffre) sur un dé est* $1/6$. *Les tirages étant indépendants,* $P(3, 3, 3) = (1/6)^3 = 1/216$.
*b) Il y a trois manières d'obtenir deux 2 et un 1, et* $6^3 = 216$ *tirages possibles, donc la probabilité cherchée est* $3/216 = 1/72$.
*c)* $6/216$.
*d) Un total de 9 s'obtient par l'une des additions suivantes,*

$$9 = 6 + 2 + 1 = 5 + 3 + 1 = 5 + 2 + 2 = 4 + 4 + 1 = 4 + 3 + 2 = 3 + 3 + 3,$$

*où on a rangé les résultats d'un tirage par ordre décroissant. On rencontre l'addition 6+2+1 dans* $3! = 6$ *tirages différents. De même pour 5+3+1 et 4+3+2. En revanche, 5+2+2 et 4+4+1 ne correspondent qu'à 3 tirages et 3+3+3 à un seul. Il y a donc 6+6+6+3+3+1=25 tirages qui donnent une somme de 9. La probabilité que la somme soit 9 vaut donc* $25/216$.
*e) Un total de 10 s'obtient par l'une des additions suivantes,*

$$10 = 6 + 3 + 1 = 6 + 2 + 2 = 5 + 4 + 1 = 5 + 3 + 2 = 4 + 4 + 2 = 4 + 3 + 3.$$

*On rencontre les additions 6+3+1, 5+4+1, 5+3+2 dans* $3! = 6$ *tirages différents. En revanche, 6+2+2, 4+4+2 et 4+3+3 ne correspondent qu'à 3 tirages. Il y a donc 6+6+6+3+3+3=27 tirages qui donnent une somme de 9. La probabilité que la somme soit 9 vaut donc* $27/216$.

**Exercice 12.** Les trois mousquetaires et d'Artagnan (donc quatre personnes) ont mélangé leurs bottes dans le couloir de l'auberge. D'Artagnan se lève le premier et prend deux bottes au hasard. Calculer la probabilité pour que :

a) Les deux bottes soient les siennes.
b) Les deux bottes forment une paire (une paire est la réunion d'un pied droit et d'un pied gauche).
c) Les deux bottes soient deux pieds droits.
d) Les deux bottes appartiennent à deux personnes différentes.

*Solution : Nombre de cas possibles* $= \binom{8}{2} = 28$ *(choisir 2 bottes parmi 8).*

*La proba est uniforme, il faut donc dénombrer le nombre de cas favorables.*

*a)* $\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \frac{1}{28}$ *(une seule façon de choisir la bonne paire de bottes).*

*b)* $\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \frac{4\times 4}{28}$ *(4 choix pour la botte gauche, 4 choix pour la botte droite).*

*c)* $\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \frac{\binom{4}{2}}{28} = \frac{6}{28}$ *(choisir 2 bottes parmi les 4 bottes droites).*

*d) Il y a 4 façons de choisir 2 bottes appartenant à une même personne.*

*Donc* $P(\text{les deux bottes sont à la même personne}) = \frac{4}{28}$

*et* $P(\text{les deux bottes sont à des personnes différentes}) = 1 - \frac{4}{28} = \frac{24}{28}$.

**Exercice 13.** Quand on joue au loto, on choisit 5 nombres différents (dits "numéros principaux") entre 1 et 49, plus un numéro chance, qui est un nombre entre 1 et 10. Ensuite a lieu le tirage du loto, qui consiste à choisir au hasard les 5 numéros principaux et le numéro chance (le tirage n'est pas biaisé, autrement dit les tirages sont équiprobables).

Quelle est la probabilité d'avoir :
a) les 5 bons numéros principaux ?
b) 4 bons numéros parmi les 5 numéros principaux ?
c) 4 bons numéros parmi les 5 numéros principaux et le bon numéro chance ?

*Solution :*

$$a)\ \frac{1}{\binom{49}{5}},\quad b)\ \frac{\binom{5}{4}}{\binom{49}{5}},\quad c)\ \frac{\binom{5}{4}\times 1}{\binom{49}{5}\times\binom{10}{1}}.$$

**Exercice 14.** On tire simultanément 6 cartes dans un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité d'avoir exactement 2 dames et 3 trèfles ?

*Solution :* $A =$ *"2 dames, 3 trèfles mais pas la dame de trèfle",* $B =$ *"dame de trèfle, une autre dame, 2 autres trèfles". Pour A : il faut choisir 2 dames parmi 3 (les 3 dames pas trèfle), 3 trèfles parmi 7 (les 7 cartes trèfles pas dame de trèfle) et une carte parmi 21 (les 21 cartes pas trèfle et pas dame). Pour B : il faut choisir la dame de trèfle, 1 dame parmi 3, 2 cartes parmi 27 et 2 cartes parmi 21.*

$$P(A) + P(B) = \frac{\binom{3}{2}\binom{7}{3}\binom{21}{1}}{\binom{32}{6}} + \frac{1\times\binom{3}{1}\binom{7}{2}\binom{21}{2}}{\binom{32}{6}}.$$