F.A.Q. [1] Probabilités

Le présent document est un support pédagogique visant à développer l'intuition du probabiliste en herbe. Il n'est en aucun cas un cours à proprement parler. Pour ne pas alourdir les réponses, nous avons fait le choix de ne pas donner les démonstration des résultats énoncés.

Question 1 *Change-t-on le problème si on met un ordre sur les variables aléatoires ? Par exemple, sur deux dés, distinguer le dé 1 du dé 2 ?*

Oui et Non ! On ajoute une hypothèse (qui change le problème) qu'il faut enlever à la fin du raisonnement (pour rétablir le problème initial). Cela peut rendre les calculs plus simples, ou plus compliqués...

Ex : Si on s'intéresse à compter le nombre de combinaisons de deux dés tels que les deux chiffres soient consécutifs, on peut tous les compter (dans un tableau par exemple). Cela fait 10. Ou on peut choisir de donner un ordre aux dés. Dans ce cas, on compte les combinaisons 1-2, 2-3, 3-4, 4-5, 5-6. Il faut ensuite enlever cette hypothèse d'ordre. Ici, on remarque qu'à chaque configuration on peut associer une configuration "sœur" en intervertissant les deux chiffres. On a donc bien $2 \times 5 = 10$ combinaisons.

Question 2 *Pourquoi lorsque l'on regarde un $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ par exemple, n'a-t-on pas toujours $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = \frac{1}{4}$?*

Lorsque l'on ne précise rien, il se peut que les évènements élémentaires ne soient pas tous équiprobables.

Ex : Imaginons que le dé à quatre faces que l'on regarde soit pipé (truqué). Ou bien que l'on ait effacé le chiffre quatre pour le remplacer par un deux. Nous aurions créé (dans la vraie vie!!!) un objet qui répond à la loi de probabilité $P(1) = P(3) = \frac{1}{4}$, $P(2) = \frac{1}{2}$ et $P(4) = 0$.

Question 3 *Pourquoi compte-t-on le nombre de possibilités d'un évènement au lieu de calculer des produits de probabilités ?*

Dans beaucoup de cas, (dés, tirages de boules,...) toutes les configurations élémentaires sont équiprobables. C'est-à-dire : $\forall\ \omega, \omega' \in \Omega,\ P(\omega) = P(\omega') = p$.
Ce qui donne : $\sum_{\omega\in\Omega} P(\omega) = 1 \Rightarrow \text{Card } \Omega \times p = 1$ et donc $p = \dfrac{1}{\text{Card } \Omega}$.
Donc lorsque l'on identifie chaque élément ω correspondant à un évènement (et surtout que l'on sait les compter), on a

$$P(A) = \sum_{\omega\in A} P(\omega) = \sum_{\omega\in A} p = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega}$$

Attention, ce n'est bien sûr pas le cas si tous les ω ne sont pas équiprobables!!!

1. F.A.Q. = "Frequently Asked Questions" ou "Foire Aux Questions"

Question 4 *Si* $\boxed{a}$ $\Omega = \{1,2,3,4\}$ $\boxed{b}$ $\Omega = \{(1,1),(1,5)\}$ $\boxed{c}$ $\Omega = \{chaise, table\} \times \{3,6\}$, *A quoi ressemblent les* ω *? A quoi ressemble un évènement ?*

$\boxed{\text{a}}$ 1 est un élément tout comme 2 par exemple. $\{2,4\}$ est un évènement, $\{1\}$ aussi.
$\boxed{\text{b}}$ $(1,1)$ et $(1,5)$ sont deux éléments.
$\boxed{\text{c}}$ $(chaise, 6)$ est un élément ; $(chaise, 3)$ aussi. $\{chaise, table\} \times \{6\}$ est un évènement de Ω.

A chaque fois, ω appartient à Ω et un évènement A est un ensemble inclus dans Ω.

Question 5 *Quand ajoute-t-on deux probabilités ?*

Dans un seul cas : lorsque l'on regarde l'union de deux évènements disjoints (on dit aussi incompatibles). C'est-à-dire $A \cap B = \emptyset$. Alors $P(A \cup B) = P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B)$

<u>Ex :</u> $P(\text{“au plus un pair”}) = P(\text{“aucun pair” ou “un pair”}) = P(\text{“aucun pair”} \cup \text{“un pair”})$. Mais comme on ne peut avoir simultanément “aucun pair” et “un pair” (les évènements sont disjoints), nous avons bien :

$$P(\text{“aucun pair” ou “un pair”}) = P(\text{“aucun pair”}) + P(\text{“un pair”})$$

Dans le cas général, on peut écrire $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

Attention, ne pas confondre incompatibles et indépendants !

Question 6 *Quand multiplie-t-on deux probabilités ?*

On se pose la question : Est-ce que la réalisation de A a une quelconque influence sur la réalisation de B ? Si la réponse est non alors les deux évènements sont indépendants ! Si deux évènements sont **indépendants** : nous avons $\boxed{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$

<u>Ex :</u> Prenons deux dés. L'un a quatre faces comportant les chiffres 1, 1, 2, 3. Le second a six faces comportant les chiffres 1, 1, 1, 2, 2, 3. On choisit au hasard l'un des deux dés puis on le lance.
On a alors :

$$\begin{aligned} P(\text{“avoir un 1” et “choisir le dé à 6 faces”}) &= P(\text{“avoir un 1”} \cap \text{“choisir le dé à 6 faces”}) \\ &= P(\text{“avoir un 1”})P(\text{“choisir le dé à 6 faces”}) \end{aligned}$$

En effet, on se fiche de savoir si on prend le dé à six faces ou à quatre faces pour connaître la chance d'avoir un 1. Elle est de $\frac{1}{2}$ sur chaque dé ! !

Question 7 *Qu'est-ce qu'une probabilité conditionnelle ?*

Elle est définie ainsi : $P(\bullet|B) = \frac{P(\bullet \cap B)}{P(B)}$. Quelle opération a-t-on fait ? On a modifié la probabilité P d'origine en une autre probabilité. C'est donc une probabilité ! ! Toutes les formules sur les probabilités s'appliquent. Cela donne la probabilité d'un évènement en sachant B de façon sûre. Pratique lorsque l'on veut scinder le problème.

<u>Ex :</u> On jette deux dés. Si on appelle X_1 le résultat du premier dé, X_2 le résultat du second et $Y = \max(X_1, X_2)$ le maximum des deux, alors :

$$\begin{aligned} P(Y = 3 \text{ et } X_1 = 3) &= P(Y = 3 | X_1 = 3)P(X_1 = 3) \\ &= P(X_2 = 1,\, 2 \text{ ou } 3)P(X_1 = 3) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

On a transformé $P(Y = 3|X_1 = 3)$ en $P(X_2 = 1,\, 2 \text{ ou } 3)$ car, sachant $X_1 = 3$, la seule manière d'avoir $Y = 3$ est que le résultat du deuxième dé soit plus petit ou égal.

Question 8 *Quand reconnaître une loi binomiale ?*

Uniquement dans le cas suivant : La population totale est **fixée** (n individus). On s'intéresse à la variable aléatoire X égale au **nombre** d'individus portant une certaine **propriété** (on note p la probabilité pour qu'un individu porte cette propriété). Cette variable aléatoire est alors modélisée par une loi Binomiale B(n,p).

Ex : Le nombre de garçons dans une population donnée. Le nombre d'ampoules défectueuses dans un échantillon donné. Le nombre de dés valant 6 sur un nombre de lancés donné.

Question 9 *Quand reconnaître une loi de Poisson ?*

La loi de Poisson est une loi de probabilité discrète qui décrit le comportement du **nombre** d'évènements se produisant dans un laps de **temps fixé**, si ces évènements se produisent avec une **fréquence moyenne connue** et **indépendamment du temps** écoulé depuis l'évènement précédent. La loi de Poisson est également pertinente pour décrire le nombre d'évènements dans d'autres types d'intervalles, spatiaux plutôt que temporels, comme des segments, surfaces ou volumes.

Ex : Le nombre d'appels arrivant à un standard téléphonique pendant une période donnée. Le nombre de personnes à la file d'attente d'un magasin arrivant pendant une durée donnée. Le nombre de poissons (!) pêchés dans un filet de pêche donné.

Question 10 *Quand reconnaître une loi géométrique ?*

Elle modélise la situation : **Tant que je perds** (avec proba $1-p$), **je joue et dès que je gagne** (avec proba p), **je m'arrête**. La variable aléatoire X qui suit une loi géométrique est alors le nombre de fois que j'ai joué (en comptant la fois où j'ai gagné).

Ex : Le nombre de lancés de canne à pêche avant d'attraper un poisson. Le nombre de lancés de dé avant d'avoir un 6. A la pétanque, le nombre de boules à lancer avant de "prendre". (vraiment ?)

Question 11 *Quand reconnaître une loi multinomiale ?*

C'est une généralisation de la loi binomiale. Là ou précédemment, on s'intéressait a un problème binaire (être ou ne pas être !), ici on regarde une collection d'individus qui peuvent prendre plus de 2 valeurs mais toujours en nombre fini. Chaque individu **peut prendre** i **valeurs** (de proba p_i). On regarde une population **fixée** (n individus). Alors la variable aléatoire $(X_1, \dots, X_i)$ suit une loi multinomiale où X_i est le **nombre** d'individus dans l'état i.

Question 12 *Quand reconnaître une loi hypergéométrique ?*

Le cadre ressemble fortement à la loi binomiale ! Mais il ne faut pas les confondre. On tire aléatoirement un **nombre fixe** n de boules dans une **population déterminée** (donc non-aléatoire) comportant des boules gagnantes (au nombre de G) et des boules perdantes (au nombre de P). Alors X, le **nombre de boules gagnantes** obtenu, suit une loi hypergéométrique.
Ici les individus ne sont pas aléatoires, mais un sous-ensemble d'individus est choisi aléatoirement dans l'ensemble (loi hypergéométrique) ce qui diffère du cas où on considère des individus aléatoires qui forment une collection fixe (loi binomiale).