Corrigé du partiel de maths discrètes

Exercice 1.
On a : $2n^2 + 5n + 3 = 2n(n + 2) + n + 3 = (2n + 1)(n + 2) + 1$. Donc

$$1 = (2n^2 + 5n + 5) - (2n + 1)(n + 2).$$

Par le théorème de Bézout, ceci implique que $2n^2 + 5n + 3$ et $n + 2$ sont premiers entre eux, et $(2n^2 + 5n + 3) - (2n + 1)(n + 2) = 1$ est une relation de Bézout entre ces deux nombres.

Exercice 2.
a) $a = 12 \times 10^2$ avec $12 = 2^2 \times 3$ et $10 = 2 \times 5$. La décomposition de a en produit de nombres premiers est donc $a = 2^4 \times 3 \times 5^2$.
$b = 35 \times 10$ avec $35 = 5 \times 7$ et $10 = 2 \times 5$. La décomposition de b en produit de nombres premiers est donc $350 = 2 \times 5^2 \times 7$.
b) On en déduit que $\text{pgcd}(a, b) = 2 \times 5^2 = 50$.
c) La décomposition de 6^n en produit de nombres premiers est $2^n \times 3^n$. Donc 6^n divise $3a$ si et seulement si $n \leq 4$ et $n \leq 2$, c'est-à-dire $n = 0, 1$ ou 2.

Exercice 3.
a) 5 et 2 sont premiers entre eux, et $5 - 2 \times 2 = 1$ est une relation de Bézout entre 5 et 2. On en déduit que $x_0 = c$ et $y_0 = -2c$ forment une solution particulière de $5x + 2y = c$.

Si (x, y) est une solution de cette équation, alors $5x+2y = 5x_0+2y_0$, donc $5(x-x_0) = -2(y-y_0)$. Par conséquent, 5 divise $2(y - y_0)$; comme 2 et 5 sont premiers entre eux, par le théorème de Gauss, 5 divise $y - y_0$, autrement dit il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y - y_0 = 5k$. On en déduit que $x - x_0 = -2k$. Réciproquement, s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - x_0 = -2k$ et $y - y_0 = 5k$, alors (x, y) est une solution de l'équation.
Conclusion : l'ensemble des $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $5x + 2y = c$ est : $\{(c - 2k, -2c + 5k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

b) Soit x le nombre d'adultes, et y le nombre d'enfants. L'entrée coûté 41 euros, autrement dit $5x + 2y = 41$. C'est l'équation de la question a) avec $c = 41$. Les couples d'entiers relatifs (x, y) solutions de $5x + 2y = 41$ sont donc : $x = 41 - 2k, y = -82 + 5k$, $k \in \mathbb{Z}$.
On cherche les solutions avec x, y entiers naturels, il faut donc :
- $x = 41 - 2k \geq 0$, soit $k \leq 20$,
- $y = -82 + 5k \geq 0$, soit $k \geq 17$.

Conclusion : les couples (x, y) solutions du problème sont $x = 41 - 2k, y = -82 + 5k$, avec $k = 17, 18, 19$ ou 20. Il y a 4 solutions. La composition du groupe (adultes/enfants) peut être : $(7, 3)$, $(5, 8)$, $(3, 13)$, $(1, 18)$. Le nombre minimal de personnes composant le groupe est $7+3 = 10$.

Exercice 4. P est un entier naturel strictement positif qui doit être un multiple de 6 et 15, il est équivalent de demander que P soit un multiple strictement positif de $\text{ppcm}(6, 15)$.
$6 = 2 \times 3$ et $15 = 3 \times 5$ (décomposition en facteurs premiers), donc $\text{ppcm}(6, 15) = 2 \times 3 \times 5 = 30$.
Conclusion : les valeurs possibles de P sont les $30k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 5.
On a : $10 \equiv 0$ (5) et $6 \equiv 1$ (5) donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $10n^2 + 7^n \equiv 0^n + 1^n \equiv 1$ (5).
Comme 5 est premier et ne divise pas 2, le théorème de Fermat implique que $2^4 \equiv 1$ (5). Comme $25 = 4 \times 6 + 1$, on en déduit que $2^{25} \equiv (2^4)^6 \times 2 \equiv 2$ (5). Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $10n^2 + 6^n - 2^{25} \equiv 1 - 2 \equiv -1 \equiv 4$ (5). Autrement dit, le reste de la division euclidienne de $10n^2 + 6^n - 2^{25}$ par 5 vaut 4.

Exercice 6.
Appliquons l'algorithme d'Euclide à 50 et 11 :

$$\begin{array}{rcrcl} 50 & = & 4 \times 11 & + & 6 \\ 11 & = & 6 & + & 5 \\ 6 & = & 5 & + & 1 \\ 5 & = & 5 \times 1 & + & 0 \end{array}$$

Donc $\mathrm{pgcd}(50, 11) = 1$ et

$$1 = 6 - 5 = 6 - (11 - 6) = 2 \times 6 - 11 = 2(50 - 4 \times 11) - 11 = 2 \times 50 - 9 \times 11.$$

C'est une relation de Bézout entre 50 et 11, on en déduit que $u = -9$ vérifie $11u \equiv 1$ (50). Par conséquent, l'équation $11x \equiv 4$ (50) est équivalente à $x \equiv 4u(50)$, soit $x \equiv -36 \equiv 5$ (50).
Conclusion : l'ensemble des $x \in \mathbb{Z}$ tels que $11x \equiv 5$ (50) est $\{-36 + 50k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{14 + 50k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 7. $15 - 2 \times 7 = 1$ donc 15 et 7 sont premiers entre eux par le théorème de Bézout et $-2 \times 7 + 15 = 1$ est une relation de Bézout entre 7 et 15.
x est solution si et seulement s'il existe $p, q \in \mathbb{Z}$ tels que $x = 1 + 7p = 9 + 15q$, donc $7p - 15q = 8$. Grâce à la relation de Bézout ci-dessus, on trouve que $p_0 = -2 \times 8 = -16$ et $q_0 = -8$ forment une solution particulière de $7p - 15q = 8$. On en déduit que $x_0 = 9 + 15q_0 = -111$ est une solution particulière du système. Par le théorème des restes chinois, l'ensemble des solutions du système est l'ensemble des $x \equiv x_0$ (7×15), c'est-à-dire $x \equiv -111 \equiv 99$ (105).

Exercice 8.
Supposons qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ tels que $\mathrm{pgcd}(a, b) = 10$, $\mathrm{pgcd}(a, c) = 24$ et $\mathrm{pgcd}(b, c) = 15$.
3 divise b car $\mathrm{pgcd}(b, c) = 15 = 3 \times 5$. De plus, 3 divise a car $\mathrm{pgcd}(a, c) = 24 = 3 \times 8$. Donc 3 est un diviseur commun à a et b, donc 3 divise $\mathrm{pgcd}(a, b)$. Or $\mathrm{pgcd}(a, b) = 10$ n'est pas divisible par 3. Conclusion : trois tels entiers a, b, c n'existent pas.