Corrigé de l'interrogation d'arithmétique

Exercice 1. Soit q_1 le reste de la division euclidienne de 13 par a et q_2 le reste de la division euclidienne de 36 par a. On a : $13 = q_1 a + 3$, $36 = q_2 a + 1$, et $3 < a$ (propriété du reste d'une division euclidienne). Donc $q_1 a = 10$ et $q_2 a = 35$.
On en déduit que a divise 10 et 35, donc a divise $\mathrm{pgcd}(10, 35)$. Les décompositions en produits de nombres premiers de 10 et de 35 sont $10 = 3 \times 5$ et $35 = 5 \times 7$, donc $\mathrm{pgcd}(10, 35) = 5$. Ceci implique que a est égal à 1 ou à 5. Or $a > 3$, donc $a = 5$.

Exercice 2. Algorithme d'Euclide entre 128 et 30 :

$$\begin{array}{ccccc} 128 & = & 4 \times 30 & + & 8 \\ 30 & = & 3 \times 8 & + & 6 \\ 8 & = & 1 \times 6 & + & 2 \\ 6 & = & 2 \times 2 & = & 0 \end{array}$$

Donc $\mathrm{pgcd}(128, 30) = 2$, et on a

$$\begin{aligned} 2 &= 8 - 6 \\ &= 8 - (30 - 3 \times 8) = 4 \times 8 - 30 \\ &= 4 \times (128 - 4 \times 30) - 30 = 4 \times 128 - 17 \times 30 \end{aligned}$$

Conclusion : $4 \times 128 - 17 \times 30 = 2$ est une relation de Bézout entre 128 et 30.

Exercice 3. On écrit :
$21n + 4 = (14n + 3) + (7n + 1)$
$14n + 3 = 2 \times (7n + 1) + 1$ Remarquons que, comme $n \in \mathbb{N}^*$, les entiers $21n + 4, 14n + 3$ et $7n + 1$ sont strictement positifs (donc non nuls).
Par le lemme d'Euclide, on en déduit que

$$\mathrm{pgcd}(21n + 4, 14n + 3) = \mathrm{pgcd}(14n + 3, 7n + 1) = \mathrm{pgcd}(7n + 1, 1).$$

Or $\mathrm{pgcd}(7n + 1, 1) = 1$. Conclusion : $\mathrm{pgcd}(21n + 4, 14n + 3) = 1$, autrement dit, $21n + 4$ et $14n + 3$ sont premiers entre eux.

Exercice 4. D'abord, $\mathrm{pgcd}(1, 2) = 1$, donc l'équation $x + 2y = 2$ a des solutions. Ensuite, $2 - 1 = 1$ est une relation de Bézout entre 2 et 1, on en déduit que $x_0 = -2, y_0 = 2$ est une solution particulière.
Si (x, y) est une solution, alors $x + 2y = 2 = x_0 + 2y_0$, d'où $(x - x_0) = -2(y - y_0)$. Donc 2 divise $(x - x_0)$, c'est-à-dire qu'il existe un entier relatif k tel que $x - x_0 = 2k$. On en déduit que $y - y_0 = -k$. Réciproquement, si $x = x_0 + 2k$ et $y = y_0 - k$, alors $x + 2y = x_0 + 2y_0 + 2k - 2k = 2$, donc (x, y) est une solution.
Conclusion : l'ensemble des solutions de $x + 2y = 2$ est $S = \{(-2 + 2k, 2 - k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 5. Si α est l'exposant de 2 dans n, alors 2α est l'exposant de 2 dans n^2 (en effet, si la décomposition de n en produit de nombres premiers s'écrit $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha^2} \dots p_r^{\alpha_r}$, alors la décomposition de n^2 est $n^2 = p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha^2} \dots p_r^{2\alpha_r}$).
$8 = 2^3$ divise n^2 si et seulement si 3 est plus petit ou égal que l'exposant de 2 dans n^2, c'est-à-dire $3 \leq 2\alpha$. On a donc $\alpha \geq 3/2 = 1,5$. Comme α est un entier, ceci implique que $\alpha \geq 2$, et donc $4 = 2^2$ divise n.

Exercice 6. Comme $4 = 2 \times 2$ et $10 = 2 \times 5$, les décompositions en produits de nombres premiers de $a = 4^n$ et $b = 10^{n+1}$ sont $a = 2^{2n}$ et $b = 2^{n+1} \times 5^{n+1}$. On en déduit que $\text{pgcd}(a, b) = 2^{\min(2n,n+1)}$ et $\text{ppcm}(a, b) = 2^{\max(2n,n+1)} \times 5^{n+1}$.
• Si $n = 0$, alors $\min(2n, n + 1) = 0$ et $\max(2n, n + 1) = 1$, donc $\text{pgcd}(a, b) = 1$ et $\text{ppcm}(a, b) = 2 \times 5 = 10$.
• Si $n \geq 1$, alors $2n = n+n \geq n+1$, donc $\min(2n, n+1) = n+1$ et $\max(2n, n+1) = 2n$, donc $\text{pgcd}(a, b) = 2^{n+1}$ et $\text{ppcm}(a, b) = 2^{2n} \times 5^{n+1}$.

Exercice 7. Puisque $ab = 2^3 \times 3^4 \times 5$, seuls les nombres premiers 2, 3 et 5 apparaissent dans les décompositions en nombres premiers de a et b. On écrit $a = 2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2} 5^{\alpha_3}$ et $b = 2^{\beta_1} 3^{\beta_2} 5^{\beta_3}$ (avec $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ des entiers naturels). On a :

$$ab = 2^{\alpha_1+\beta_1} \cdot 3^{\alpha_2+\beta_2} \cdot 5^{\alpha_3+\beta_3} \quad \text{et} \quad \text{pgcd}(a, b) = 2^{\min(\alpha_1,\beta_1)} \cdot 3^{\min(\alpha_2,\beta_2)} \cdot 5^{\min(\alpha_3,\beta_3)}.$$

Pour avoir $ab = 2^3 \times 3^4 \times 5$ et $\text{pgcd}(a, b) = 3$, il faut donc avoir (par unicité de la décomposition en facteurs premiers) :
• $\alpha_1 + \beta_1 = 3$ et $\min(\alpha_1, \beta_1) = 0$, donc soit $\alpha_1 = 3$ et $\beta_1 = 0$, soit $\beta_1 = 3$ et $\alpha_1 = 0$.
• $\alpha_2 + \beta_2 = 4$ et $\min(\alpha_2, \beta_2) = 1$, donc soit $\alpha_1 = 3$ et $\beta_1 = 1$, soit $\beta_1 = 3$ et $\alpha_1 = 1$.
• $\alpha_3 + \beta_3 = 1$ et $\min(\alpha_3, \beta_3) = 0$, donc soit $\alpha_3 = 1$ et $\beta_3 = 0$, soit $\beta_3 = 1$ et $\alpha_3 = 0$.
Conclusion : il y a 8 couples de solution :
• $a = 2^3 \times 3^3 \times 5 = 1080$ et $b = 3$,
• $a = 2^3 \times 3^3 = 216$ et $b = 3 \times 5 = 15$,
• $a = 2^3 \times 3 \times 5 = 120$ et $b = 3^3 = 27$,
• $a = 2^3 \times 3 = 24$ et $b = 3^3 \times 5 = 135$,
• $a = 3^3 \times 5 = 135$ et $b = 2^3 \times 3 = 24$,
• $a = 3^3 = 27$ et $b = 2^3 \times 3 \times 5 = 120$,
• $a = 3 \times 5 = 15$ et $b = 2^3 \times 3^3 = 216$,
• $a = 3$ et $b = 2^3 \times 3^3 \times 5 = 1080$.

Exercice 8.
• Modulo 2 :
$4 \equiv 0$ (2) donc $4^{17} \equiv 0^{17} \equiv 0$ (2).
$11 \equiv 1$ (2) donc $11^{10} \equiv 1^{10} \equiv 1$ (2).
D'où $4^{17} + 11^{10} - 1 \equiv 0 + 1 - 1 \equiv 0$ (2)
• Modulo 5 :
$4 \equiv -1$ (5) donc $4^{17} \equiv (-1)^{17} \equiv -1$ (5).
$11 \equiv 1$ (5) donc $11^{10} \equiv 1^{10} \equiv 1$ (5).
D'où $4^{17} + 11^{10} - 1 \equiv -1 + 1 - 1 \equiv -1$ (5). Donc $4^{17} + 11^{10} - 1$ n'est pas multiple de 5, et donc pas multiple de 10 non plus.