Corrigé du devoir n° 1

Exercice 1.
$m = n^2 + 3n + 1 = (n+3)n + 1$, donc $1 = m - (n+3)n$. Par le théorème de Bézout, n et m sont premiers entre eux et $-(n+3)n + m = 1$ une relation de Bézout entre n et m.

Exercice 2.
a) On applique l'algorithme d'Euclide à 47 et 26.

$$\begin{array}{rcrcr} 47 & = & 1 \times 26 & + & 21 \\ 26 & = & 1 \times 21 & + & 5 \\ 21 & = & 4 \times 5 & + & 1 \\ 5 & = & 5 \times 1 & + & 0 \end{array}$$

On en déduit que $\mathrm{pgcd}(47, 26) = 1$ (dernier reste non nul dans l'algorithme d'Euclide), autrement dit $a = 26$ et $b = 47$ sont premiers entre eux.

b) Par le théorème de Bézout, il existe des entiers u et v tels que $au + bv = \mathrm{pgcd}(a, b) = 1$. On en déduit que $1 + au + bv = 2$, et donc $1 + au = 2 - bv$.
Pour des entiers u et v vérifiant cette égalité, on pose $n = 1 + au$. Alors $n - 1 = au$ est un multiple de a et, comme $1 + au = 2 - bv$, on obtient que $n - 2 = -bv$ est un multiple de b.

c) On veut trouver tous les entiers n tels que

$$a|(n-1) \quad \text{et} \quad b|(n-2) \qquad \text{(M)}$$

Un entier n vérifie (M) si et seulement s'il existe des entiers u, v tels que $n-1 = au$ et $n-2 = -bv$, autrement dit $n = au + 1$ et $au + bv = 1$. On est donc ramené à résoudre l'équation

$$au + bv = 1 \qquad \text{(E)}$$

On utilise les calculs de la question a) pour trouver une relation de Bézout entre a et b.

$$\begin{array}{rcl} 1 & = & 21 - 4 \times 5 \qquad \text{(grâce à la 3ème ligne)} \\ & = & 21 - 4 \times (26 - 21) \qquad (5 = 26 - 21 \text{ grâce à la 2ème ligne}) \\ & = & 5 \times 21 - 4 \times 26 \\ & = & 5 \times (47 - 26) - 4 \times 26 \qquad (21 = 47 - 26 \text{ grâce à la 1ère ligne}) \\ & = & 5 \times 47 - 9 \times 26 \end{array}$$

Donc $-9a + 5b = 1$ est une relation de Bézout entre a et b, et $u_0 = -9$ et $v_0 = 5$ forment une solution particulière de (E).
On cherche maintenant toutes les solutions de (E). Si (u, v) est une solution de (E), alors $au + bv = 1 = au_0 + bv_0$, donc $a(u - u_0) = -b(v - v_0)$. Ceci implique que b divise $a(u - u_0)$. Comme a et b sont premiers entre eux (question a), le théorème de Gauss implique que b divise $u - u_0$: il existe un entier k tel que $u - u_0 = bk$. On a alors : $a(u - u_0) = -b(v - v_0) = abk$, donc en simplifiant par $b \neq 0$, on obtient $v - v_0 = -ak$. Autrement dit, toute solution (u, v) est de la forme $u = u_0 + bk, v = v_0 - ak$.

Réciproquement, pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$, on vérifie que les entiers $u = u_0 + bk, v = v_0 - ak$ forment une solution de (E) (car $au + bv = au_0 + bv_0 + abk - abk = 1$). On en déduit que l'ensemble des solutions de (E) est $S' = \{(-9 + bk, 5 - ak) \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
Un entier n est solution de (M) si et seulement si $n = au + 1$, où (u, v) est une solution de (E). Donc l'ensemble des solutions de (M) est

$$S = \{a(-9 + bk) + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{abk - 9a + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{1222k - 233 \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

d) L'entier $n = 1222k - 233$ est positif si et seulement si $k \geq \frac{233}{1222} \simeq 0.19$. Comme k est un entier, $n = 1222k - 233$ est positif si et seulement si $k \geq 1$. La plus petite solution positive de (M) est donnée par $k = 1$, c'est $n_0 = 989$.

Exercice 3.
a) Pour pouvoir remplir la boîte B à l'aide de cubes d'arêtes de longueur a de façon à ne laisser aucun espace vide, il faut et il suffit que la hauteur de la boîte B et la longueur du côté de sa base soient multiples de a. Autrement dit, a est un diviseur commun à h et ℓ. La plus grande taille a convenable est $\mathrm{pgcd}(h, \ell)$. Calculons donc $\mathrm{pgcd}(945, 882)$ à l'aide de l'algorithme d'Euclide.

$$\begin{aligned} 945 &= 882 \times 1 + 63 \\ 882 &= 63 \times 14 + 0. \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{pgcd}(945, 882) = 63$. La plus grande taille a est 63 mm. Les autres tailles possibles sont les diviseurs de $63 = 3^2 7$, c'est-à-dire 1, 3, 7, 9 ou 21 millimètres.

b) On cherche les longueur ℓ et hauteur h de B. On détermine leurs décompositions en produit de nombres premiers. De l'expression du volume de B en fonction de ℓ et h,

$$v = h\ell^2 \tag{1}$$

on déduit que les nombres premiers qui interviennent dans la décomposition en facteurs premiers de ℓ et h sont ceux qui apparaissent dans celle de $v = 243000 = 2^3 \times 3^5 \times 5^3$. Ainsi, ℓ et h s'écrivent :

$$\ell = 2^r \times 3^s \times 5^t \quad \text{et} \quad h = 2^x \times 3^y \times 5^z \quad \text{avec} \quad r, s, t, x, y, z \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

et il reste à déterminer les entiers r, s, t, x, y, z. En revenant à (1), par unicité de la décomposition en facteurs premiers d'un entier, on obtient une première série de conditions sur les entiers r, s, t, x, y, z, à savoir :

$$2r + x = 3, \quad 2s + y = 5, \quad 2t + z = 3. \tag{3}$$

Les solutions de (3) sont :

$$(r, x) = (0, 3) \text{ ou } (1, 1), \quad (s, y) = (0, 5) \text{ ou } (1, 3) \text{ ou } (2, 1), \quad (t, z) = (0, 3) \text{ ou } (1, 1).$$

De plus, la boîte B peut être remplie par des cubes d'arête de longueur 15 mm mais non par des cubes d'arête plus grande ce qui se traduit, d'après le raisonnement de la question précédente, par : $a = \mathrm{pgcd}(\ell, h)$. En utilisant l'écriture (2) et l'expression du pgcd à partir de cette écriture, cette condition devient :

$$15 = 2^{\min(r,x)} \times 3^{\min(s,y)} \times 5^{\min(t,z)} \iff \min(r, x) = 0, \min(s, y) = 1, \min(t, z) = 1,$$

par unicité de la décomposition en facteurs premiers de 15. Par conséquent, des solutions de (3) trouvées précédemment, seules conviennent :

$$(r, x) = (0, 3), \quad (s, y) = (1, 3) \text{ ou } (2, 1), \quad (t, z) = (1, 1).$$

En conclusion, il existe deux dimensions possibles pour la boîte B : soit $\ell = 2^0 \times 3^2 \times 5 = 45$ mm et $h = 2^3 \times 3 \times 5 = 120$ mm ; soit $\ell = 2^0 \times 3 \times 5 = 15$ mm et $h = 2^3 \times 3^3 \times 5 = 1080$ mm.