

## Examen de maths discrètes

14 janvier 2010 – Durée : 2 heures

*Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.*

Toutes les réponses doivent être justifiées.

**Exercice 1.** Déterminer le reste de la division euclidienne de  $3^{1793}$  par 11.

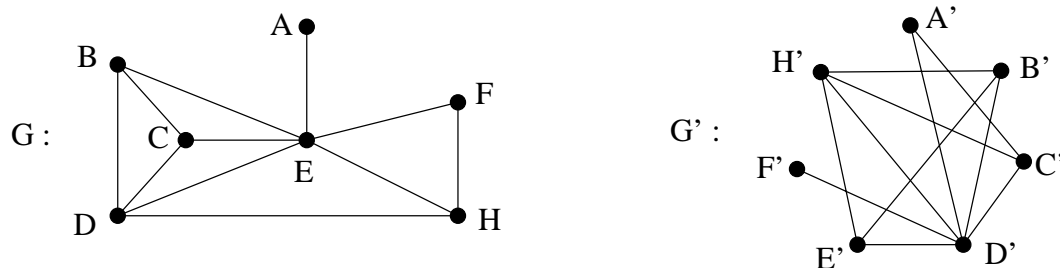
**Exercice 2.** Alice et Sophie vont régulièrement nager après leur travail. Alice va à la piscine tous les 7 jours et Sophie y va tous les 10 jours. Sachant qu'Alice y retournera dans 2 jours et que Sophie y va demain (dans 1 jour), dans combien de jours s'y trouveront-elles ensemble pour la première fois ?

**Exercice 3.**

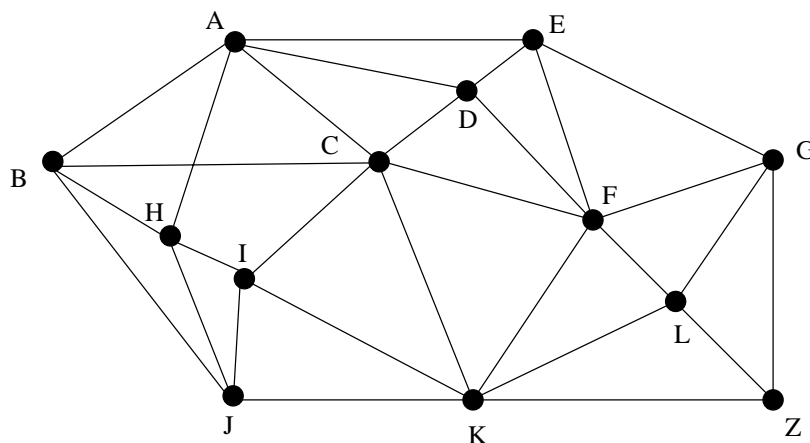
a) Existe-t-il un graphe simple à 7 sommets tel que la liste des degrés des sommets est 1, 2, 3, 3, 3, 4, 5 ?

b) Existe-t-il un graphe simple à 7 sommets tel que la liste des degrés des sommets est 3, 3, 4, 4, 4, 5, 7 ?

**Exercice 4.** Les graphes  $G$  et  $G'$  sont-ils isomorphes ?



**Exercice 5.** Le graphe suivant représente un réseau de bus : les sommets sont des arrêts de bus et les arêtes représentent des liaisons directes en bus.



a) Quel est le nombre minimum de bus qu'il faut prendre pour aller de B à Z ? Donner un itinéraire réalisant ce nombre de bus.

b) Est-il possible de faire un trajet en bus qui part de A, qui emprunte une fois et une seule chaque liaison en bus et qui revient au point de départ ?

c) Est-il possible de faire un trajet en bus qui part de A, qui emprunte une fois et une seule chaque liaison en bus et qui arrive en Z ?

**Exercice 6.** Paul vient de recevoir 8 poissons. Certains poissons ne peuvent pas cohabiter dans un même aquarium parce que certaines espèces mangent d'autres espèces. On représente par une croix dans le tableau ci-dessous les incompatibilités entre poissons (appelés A, B, ..., H).

	A	B	C	D	E	F	G	H
A		x		x	x			x
B	x		x	x	x	x		
C		x		x	x			
D	x	x	x		x		x	x
E	x	x	x	x		x	x	x
F		x			x		x	x
G				x	x	x		x
H	x			x	x		x	

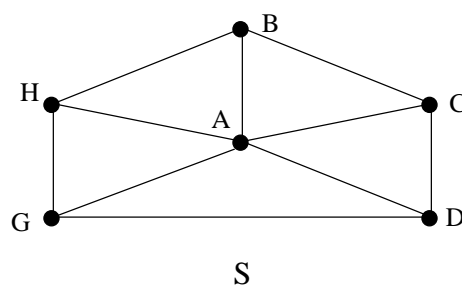
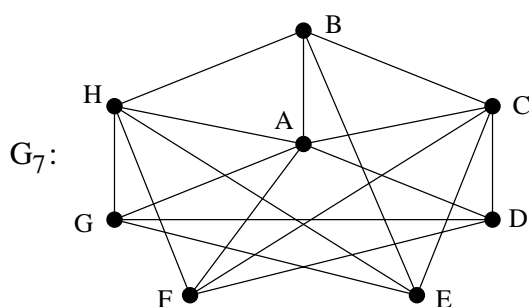
a) Modéliser la situation par un graphe et déterminer le nombre minimal d'aquariums qu'il faut pour loger tous les poissons. Donner également une répartition possible avec ce nombre d'aquariums.

b) Paul aimerait mettre ses poissons dans 4 aquariums, en mettant 2 poissons par aquarium. Est-ce possible ?

**Exercice 7.**

a) Le graphe  $G_7$  (ci-dessous à gauche) a-t-il un cycle eulérien ?

b) Le graphe  $G_7$  a-t-il un cycle hamiltonien ?



**Exercice 8.**

On considère le graphe  $G_7$  (ci-dessus à gauche), et  $S$  le sous-graphe de  $G_7$  donné par les sommets A, B, C, D, G et H (ci-dessus à droite).

a) Montrer que le nombre chromatique de  $S$  est 4 (on pourra d'abord considérer le sous-graphe  $BCDGH$ ).

b) Quel est le nombre chromatique de  $G_7$  ?