

Examen de maths discrètes : théorie des graphes

16 décembre 2008 – Durée : 2 heures

Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.

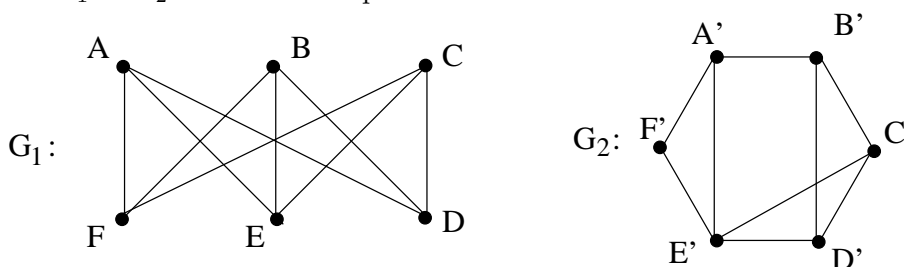
Toutes les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1.

- Existe-t-il un graphe simple à 6 sommets dont les degrés des sommets sont 1, 2, 2, 2, 3, 3 ?
- Existe-t-il un graphe simple à 4 sommets dont les sommets sont tous de degré 1 ?

Exercice 2.

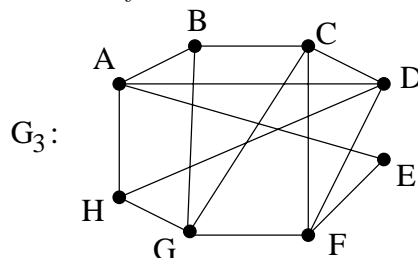
- Les graphes G_1 et G_2 sont-ils isomorphes ?



- Le graphe G_1 a-t-il un cycle hamiltonien ? a-t-il un chemin eulérien ?

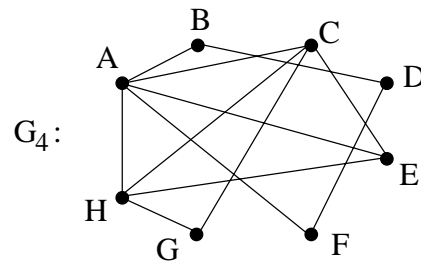
Exercice 3.

- Le graphe G_3 a-t-il un cycle eulérien ?
- Peut-on ajouter une arête à G_3 pour obtenir un nouveau graphe ayant un cycle eulérien ? Si oui, précisez quelle arête et donnez un cycle eulérien dans le nouveau graphe.



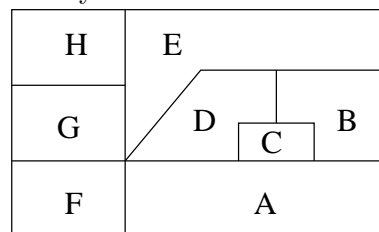
Exercice 4. 6 produits chimiques, notés P1, P2, P3, P4, P5, P6, doivent être transportés en train. Certains sont incompatibles entre eux et ne peuvent pas être transportés dans le même wagon : il s'agit des paires (P1,P2), (P1,P4), (P2,P3), (P2,P5), (P3,P4), (P5,P6). On cherche le nombre minimal de wagons nécessaires pour transporter ces produits. Modélisez d'abord la situation par un graphe, traduisez la question en terme de graphes, puis donnez le nombre minimal de wagons nécessaires et indiquez une répartition possible des produits dans les wagons.

Exercice 5. Le graphe G_4 représente 8 villes (notées A, B, C, D, E, F, G, H), et les liaisons aériennes entre ces villes.



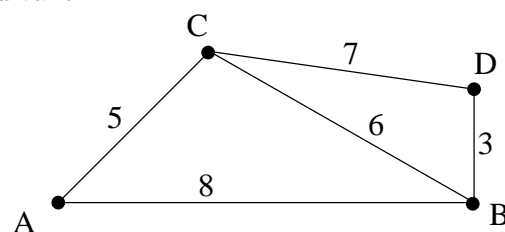
- Peut-on aller de n'importe quelle ville à n'importe quelle autre ville en avion ?
- Combien d'avions au minimum faut-il prendre pour aller de B à G ?
- L'aéroport de la ville A est fermé à cause de la neige : aucun avion ne peut décoller ou atterrir en A. Parmi les villes différentes de A, est-il encore possible d'aller en avion de n'importe quelle ville à n'importe quelle autre ville ?

Exercice 6. Voici la carte de 8 pays avec leurs frontières. Deux pays se touchant par un seul point ne sont pas considérés comme ayant une frontière commune.



- Indiquez comment colorier la carte avec le minimum de couleurs de telle façon que deux pays avec une frontière commune aient des couleurs différentes.
- Quel est le nombre minimum de frontières à franchir pour aller de A à H ? Indiquez un chemin possible.

Exercice 7. Utiliser l'algorithme de Dijkstra pour trouver un chemin de poids minimal allant de A à D dans le graphe suivant.



Barème indicatif : 2 - 3,5 - 3 - 3 - 2,5 - 4 - 2