

# Examen de Théorie des Graphes

9 janvier 2006 – Durée : 2 heures

*Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.*

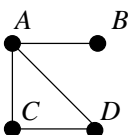
*Il faut justifier les réponses.*

**Exercice 1.** Existe-t-il un graphe simple à 5 sommets tel que la liste des degrés des sommets est 1, 1, 2, 2, 3 ? Si oui, dessinez-en un.

**Exercice 2.**

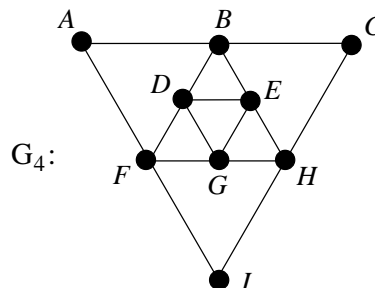
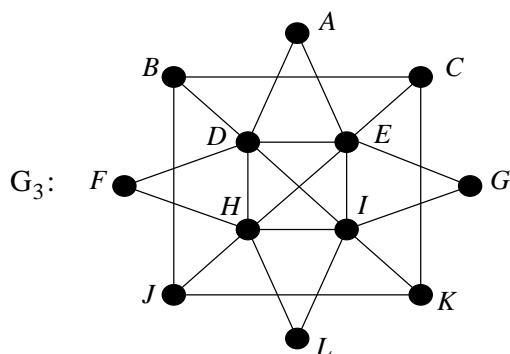
a) Tracer le graphe  $G_1$  dont la matrice d'adjacence est  $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) Soit  $G_2$  :

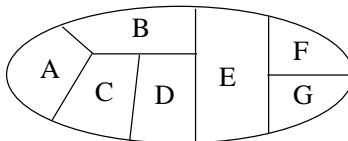


Les graphes  $G_1$  et  $G_2$  sont-ils isomorphes ?

**Exercice 3.** Les graphes suivants ont-ils un cycle eulérien ? une chaîne eulérienne ? Si oui, donner une chaîne eulérienne ou un cycle eulérien.

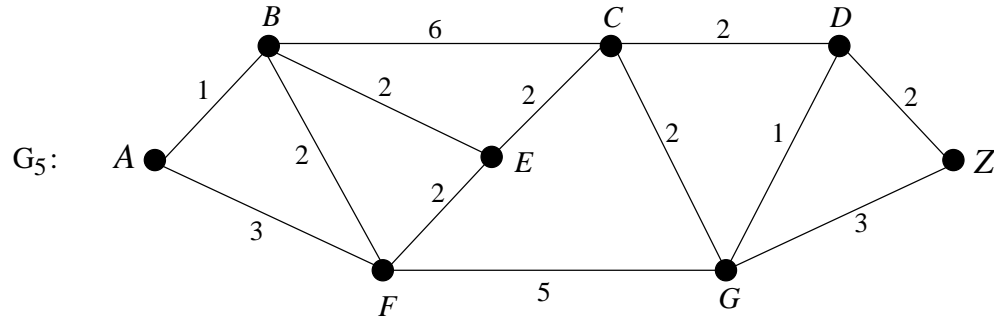


**Exercice 4.** Il y a 7 communes sur une île. Voici la carte des communes avec leurs frontières.



On veut se rendre de la commune A à la commune G (sans passer par la mer). Combien de frontières faut-il traverser au minimum ? Modéliser d'abord le problème en termes de graphes.

**Exercice 5.** Le graphe suivant représente un réseau autoroutier avec le coût du péage (en euros) de chaque tronçon d'autoroute. On veut se rendre de la ville  $A$  à la ville  $Z$  de la façon la plus économique. Quel est le coût minimum? Quel itinéraire faut-il suivre?



**Exercice 6.** On installe 7 nichoirs à oiseaux dans un parc, qu'on note  $N1, N2, \dots, N7$ . Les distances mutuelles (en mètres) entre les nichoirs sont données dans le tableau ci-dessous. Deux nichoirs situés à moins de 100 mètres ne peuvent pas être occupés par la même espèce d'oiseaux. Trois espèces d'oiseaux vivent dans le parc : des mésanges, des rouges-gorges et des pinsons. Est-ce que tous les nichoirs peuvent être occupés? Modéliser d'abord le problème en termes de graphes, puis répondre à la question.

	$N2$	$N3$	$N4$	$N5$	$N6$	$N7$
$N1$	55	110	108	60	150	88
$N2$		87	142	133	98	139
$N3$			77	91	85	93
$N4$				75	114	82
$N5$					107	41
$N6$						123

*Barème indicatif : 2 - 2,5 - 3,5 - 3 - 5,5 - 3,5*