
Partiel de maths discrètes : arithmétique**28 octobre 2008 – Durée : 2 heures***Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.*

Toutes les réponses doivent être justifiées.**Exercice 1.** Montrer que, pour tout entier naturel n , $4^n + 15n - 1$ est divisible par 9.**Exercice 2.** Soit n un entier naturel. Montrer que $n^2 + 3n + 1$ et $n + 2$ sont premiers entre eux.**Exercice 3.**a) Déterminer tous les couples d'entiers relatifs (x, y) tels que $10x + 6y = 46$.

b) Un groupe de personnes va au cinéma et dépense 46 euros. Les places coûtent 10 euros pour les adultes et 6 euros pour les enfants. De combien d'enfants et d'adultes le groupe peut-il être composé ?

Exercice 4. Déterminer le pgcd et le ppcm de $a = 2^3 \times 3 \times 7 = 168$ et de $b = 100$.**Exercice 5.** Un entier naturel A a un seul diviseur premier, qui est 7. De plus, A a exactement 5 diviseurs dans \mathbb{N} . Déterminer A .**Exercice 6.** Déterminer tous les entiers relatifs tels que $3x \equiv 5 \pmod{11}$.**Exercice 7.** Soit n un entier naturel.a) Déterminer, en fonction de n , le reste modulo 7 de n^{60} .b) Montrer que, pour tout n , $n(n^{60} - 1)$ est divisible par 7.c) Montrer que, pour tout n , $n(n^{60} - 1)$ est divisible par 3.d) Montrer que, pour tout n , $n(n^{60} - 1)$ est divisible par 2.e) En déduire que, pour tout n , $n(n^{60} - 1)$ est divisible par 42.**Exercice 8.**a) Soit d un entier naturel non nul et a_1, a_2 deux entiers relatifs. On effectue les divisions euclidiennes de a_1 et de a_2 par d : $a_1 = dq_1 + r_1$ et $a_2 = dq_2 + r_2$.Si $r_1 \geq r_2$, que valent le reste et le quotient de la division euclidienne de $a_1 - a_2$ par d ?b) Soit a et b deux entiers avec $a > b$. On fait les divisions euclidiennes de a et de b par $d = a - b$. Comparer les restes et les quotients obtenus.

Barème indicatif : 2 - 2 - 3 - 2 - 1,5 - 1,5 - 5 - 3