

Examen d'Arithmétique – deuxième session**24 Juin 2006 – Durée : 2 heures***Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.**Barème indicatif : 3 – 3 – 4 – 5 – 5***S'il vous plaît, indiquez en clair sur votre copie si vous êtes inscrit en L1 ou L2 ?****Exercice 1.** 1) Pour quelles valeurs de l'entier relatif n , existe-t-il $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tel que

$$33x + 24y = n?$$

2) Déterminer l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tels que

$$33x + 24y = 12$$

Exercice 2. On donne

$$A = 5880 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7^2.$$

1) Décomposer en facteurs premiers l'entier $B = 6930$,2) Donner sous forme de produits de facteurs premiers le p.g.c.d. et le p.p.c.m. de A et B **Exercice 3.** Déterminer le reste de :a) la division de $(101)^{36}$ par 100b) la division de 3^{1546} par 13**Exercice 4.** On note selon l'usage, $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{6}$ les éléments de $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.1) Expliciter l'application $x \mapsto x^3$ dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, existe-t-il $x \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ tel que $x^3 = a$?2) Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, existe-t-il $(x, y) \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ tel que $x^3 - y^3 = a$?3) Montrer qu'il n'existe aucun couple d'entiers relatifs (u, v) tel que $u^3 - v^3 = 60$.**Exercice 5.** La deuxième page d'un remarquable livre d'arithmétique commence par le mot «en », puis une page sur 7, et une page sur 7 seulement (c'est-à-dire les pages 2,9,16,...), commence par ce mot.

La troisième page se termine par le mot «fin », puis une page sur 137, et une page sur 137 seulement se termine par le mot «fin », c'est-à-dire les pages 3,140, 277,...

La dernière page commence par «en »et se termine par «fin », et c'est la seule page ayant cette propriété.

Quel est le nombre de pages de ce livre ?

(on commencera par déterminer deux entiers relatifs u et v tels que $7u + 137v = 1$)