
Partiel de maths discrètes : arithmétique**4 novembre 2011 – Durée : 2 heures***Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.*

Toutes les réponses doivent être justifiées.**Exercice 1.** Soient $a = 26$ et $b = 47$.

- a) Montrer que a et b sont premiers entre eux et donner une relation de Bézout entre a et b .
- b) Déterminer tous les couples d'entiers relatifs (x, y) tels que $1 + ax = 2 + by$.
- c) En déduire qu'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n - 1$ soit multiple de a et $n - 2$ soit multiple de b , et déterminer tous les entiers relatifs n vérifiant cette propriété.

Exercice 2.

- a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $\text{pgcd}(4^n, 10^n)$.
- b) Déterminer tous les couples d'entiers naturels (a, b) tels que $\text{pgcd}(a, b) = 5$ et $\text{ppcm}(a, b) = 100$.

Exercice 3.

- a) Pour quelles valeurs de l'entier a existe-t-il $x \in \mathbb{Z}$ tel que $10x \equiv a \pmod{26}$?
- b) Déterminer tous les entiers $x \in \mathbb{Z}$ tels que $10x \equiv 4 \pmod{26}$, et donner la plus petite solution positive.

Exercice 4.

- a) Déterminer toutes les solutions $x \in \mathbb{Z}$ du système

$$\begin{cases} x \equiv -4 & (15) \\ x \equiv -2 & (8) \end{cases}$$

- b) Le bus A passe toutes les 15 minutes, le précédent bus A est passé il y a 4 minutes. Le bus B passe toutes les 8 minutes, le précédent bus B est passé il y a 2 minutes. Dans combien de minutes les deux bus passeront-ils en même temps pour la première fois ?

Exercice 5.

- a) Déterminer le reste modulo 5 de n^{41} en fonction de $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^{41} - n$ est divisible par 5.
- b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^{41} - n$ est divisible par 11.
- c) En déduire que pour $n \in \mathbb{N}$, $n^{41} - n$ est divisible par 55.

Exercice 6. On range 365 pots de yaourt dans des caisses identiques. La règle est de ranger les pots de la même manière dans chaque caisse et de ne pas commencer une caisse avant d'avoir rempli la précédente. A la fin, on a utilisé 11 caisses pour ranger tous les pots. On note n le nombre de pots que contient une caisse pleine et r le nombre de pots dans la dernière caisse. Quelles sont les valeurs possibles de n et de r ?

Barème indicatif : 4 – 3 – 3,5 – 3,5 – 3 – 3