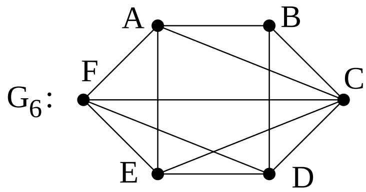
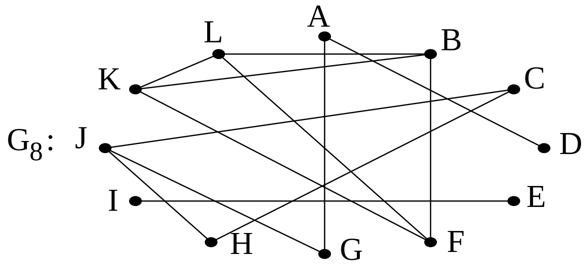
Feuille d'exercices n° 8

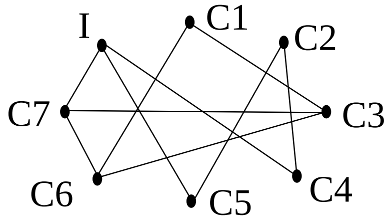
Exercice 1. On se place dans le graphe G_6 (ci-contre).
a) Donner 2 chemins de longueurs différentes allant de A à D. Donner un chemin fermé passant par A
b) ABCDBA désigne-t-il un chemin ? si oui, donner sa longueur et dire si c'est un chemin simple. Même question pour ABEFA et ACEABDEFA.



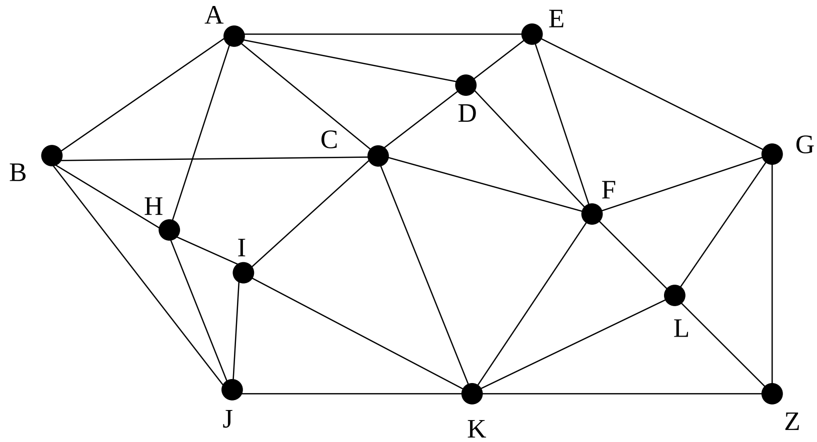
Exercice 2.
Le graphe G_8 ci-dessous est-il connexe ? Trouver la composante connexe de chaque sommet.



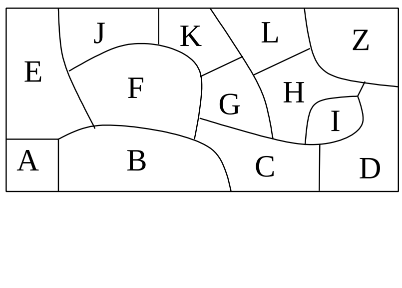
Exercice 3.
Un réseau informatique est composé de 7 ordinateurs (appelés C1,..., C7) et d'une imprimante (appelée I), reliés par des câbles. Ce réseau est représenté par le graphe ci-contre. Si on retire le câble entre l'ordinateur C4 et l'imprimante I, peut-on accéder à l'imprimante via le réseau à partir de de n'importe quel ordinateur ? Même question avec le câble entre C7 et I.



Exercice 4. Le graphe suivant représente un réseau de bus : les sommets sont des arrêts de bus et les arêtes représentent des liaisons directes en bus. Quel est le nombre minimum de bus qu'il faut prendre pour aller de B à Z ? Donner un itinéraire réalisant ce nombre de bus.

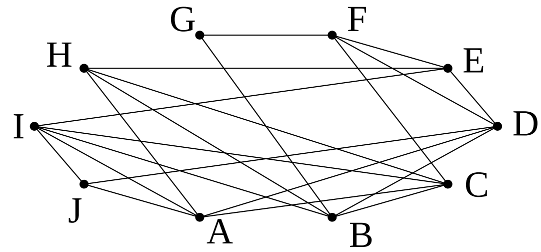


Exercice 5. Le dessin ci-contre représente différents pays sur une île. Le héros, dans le pays A, veut aller dans le pays Z pour délivrer la princesse, sans passer par la mer. Il veut savoir par où il peut passer pour aller de A à Z en traversant le moins de pays possible.
a) Modéliser le problème en termes de graphes (c'est-à-dire définir le graphe et reformuler la question).
b) Donner un itinéraire optimal pour le prince, en précisant le nombre de pays par lequel il passe et le nombre de frontières franchies.



Exercices supplémentaires

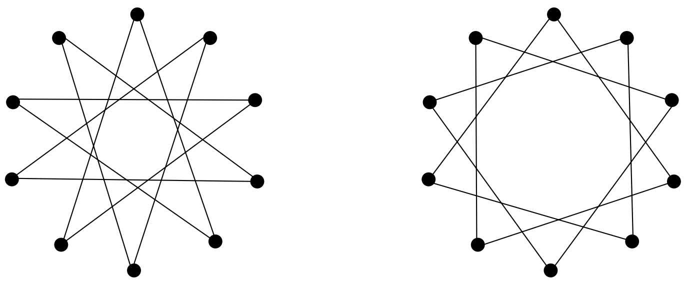
Exercice 6.
a) Quelle est la distance entre les sommets A et G dans le graphe ci-contre ?
b) Préciser tous les plus courts chemins entre A et G.



Exercice 7*.
a) Dans un tout petit pays, il n'y a que 15 villes. On peut aller de chaque ville à au moins 7 autres villes par une autoroute. Montrer que l'on peut se rendre, par autoroute, de la capitale du pays à chacune des autres villes.
b) A-t-on le même résultat s'il y a 16 villes ?

Exercice 8*. On a 3 seaux A, B, C de contenances respectives 5, 3 et 2 litres. Au départ A est plein et les autres sont vides. On autorise l'opération qui consiste à transvaser le seau X dans le seau Y jusqu'à ce que X soit vide ou Y soit plein. Peut-on arriver de cette façon à ce qu'un des seaux contienne 1 litre ? Peut-on obtenir 2 litres dans le seau A, 2 litres dans le seau B et 1 litre dans le seau C ?

Exercice 9. Les deux graphes suivants sont-ils isomorphes ?



Exercice 10. Un jeu de plage se joue avec 2 cailloux blancs et 3 cailloux noirs. Les 2 joueurs jouent à tour de rôle, selon la règle suivante : à chaque tour on peut soit retirer un seul caillou, soit retirer 2 cailloux de couleurs différentes. Le joueur qui gagne est celui qui ramasse les derniers cailloux.
a) Représenter tous les enchaînements possibles du jeu à l'aide d'un graphe orienté. Une étape du jeu sera représentée par un couple (i, j), où i désigne le nombre de cailloux blancs restants et j le nombre de cailloux noirs restants.
b) Quel est le nombre minmum de coups d'une partie ? Donner un exemple de parties réalisant ce nombre de coups.
c) Alice et Bob jouent ensemble. Alice commence et retire un caillou blanc et un caillou noir. Bob peut-il gagner ? Si oui, que doit-il jouer pour être sûr de gagner ?

Exercice 11. Un mot binaire est une suite ordonnée de 0 et de 1. Par exemple 010 est un mot binaire de longueur 3. On dit que deux mots binaires de même longueur diffèrent de k caractères si les suites ordonnées ont k termes différents. Par exemple 010 et 110 diffèrent par un seul caractère, alors que 010 et 001 diffèrent par deux caractères.
a) On considère le graphe dont les sommets sont les mots binaires de longueur 3, dans lequel 2 mots sont reliés par une arête quand ils ne diffèrent que par un seul caractère. Quel est le degré de chaque sommet ? Donner l'ensemble des mots qui ne sont pas voisins de 010.
b) Il est possible qu'au cours d'une transmission radio, on ait une erreur portant sur un seul caractère. Donner tous les mots m de longueur 3 tel que les mots m et 010 ne peuvent pas être confondus :
– dans le cas où seul le mot m est transmis,
– dans le cas où les deux mots m et 010 sont transmis (une erreur de transmission est possible dans chacun des mots).