Feuille d'exercices n° 6

Théorème de Fermat

Exercice 1. Trouver le reste de la division euclidienne de 2^{1000} par 13.

Exercice 2. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $2^{52} \equiv n$ (11).

Exercice 3. Des micro-algues se reproduisent en se divisant chaque jour. Au début il y en a 5, et tous les jours le nombre d'algues double. Au bout de 10 semaines, un poisson très glouton arrive et mange toutes les algues dans la même journée. Il fait des bouchées contenant 17 algues (précisément !), sauf la dernière bouchée qui en contient moins. Combien avale-t-il d'algues lors de cette dernière bouchée ?

Exercice 4. Montrer qu'il existe dans la suite $u_n = 2^n - 3$ une infinité de termes divisibles par 5 et une infinité de termes divisibles par 13, mais qu'aucun n'est divisible par 65.

Théorème des restes chinois

Exercice 5. Le bus n° 21 passe toutes les 7 minutes, et le prochain bus n° 21 passera dans 2 minutes. Le bus n° 17 passe toutes les 10 minutes au même arrêt, et le prochain bus n° 17 passera dans 1 minute. Dans combien de minutes les 2 bus passeront-ils en même temps pour la première fois ?

Exercice 6. La comète A passe tous les 5 ans et a été observée l'année dernière. La comète B passe tous les 8 ans et a été observée il y a 2 ans. La comète C passe tous les 11 ans et a été observée il y a 3 ans. On veut savoir quelle sera la prochaine fois où on pourra observer ces 3 comètes la même année.
a) Écrire le système d'équations de congruence vérifié par une année x où les 3 comètes peuvent être observées.
b) Que valent 14 modulo 5 et 14 modulo 8 ? En déduire que x est solution de $(S)\ \begin{cases} x & \equiv & 14 & (40) \\ x & \equiv & -3 & (11) \end{cases}$
c) Que vaut 11×11 modulo 40 ? Donner une relation de Bézout entre 11 et 40.
d) Résoudre le système (S) puis donner la réponse cherchée.

Exercices supplémentaires

Exercice 7. a) Décomposer 561 et 560 en produit de nombres premiers.
b) Montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \equiv b\ (561) \iff \begin{cases} a \equiv b\ (3) \\ a \equiv b\ (11) \\ a \equiv b\ (17) \end{cases}$
c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $n^{561} \equiv n$ (3). Montrer de même que $n^{561} \equiv n$ (11) et $n^{561} \equiv n$ (17).
d) En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, $n^{561} \equiv n$ (561).

Remarque : un entier k non premier tel que $\forall n \in \mathbb{Z}, n^k \equiv n\ (k)$ est appelé un nombre de Carmichaël. 561 est le plus petit.

Exercice 8. Soit n un entier naturel.
a) Déterminer, en fonction de n, le reste modulo 7 de n^{60}. En déduire que, pour tout n, $n(n^{60} - 1)$ est divisible par 7.
b) Montrer que, pour tout n, $n(n^{60} - 1)$ est divisible par 3.
c) Montrer que, pour tout n, $n(n^{60} - 1)$ est divisible par 2.
d) En déduire que, pour tout n, $n(n^{60} - 1)$ est divisible par 42.

Exercice 9 *. Soit $p = 2k + 1$ un nombre premier impair. Soit a un entier non divisible par p. Montrer que $a^k \equiv 1$ ou $a^k \equiv -1$ modulo p.

Exercice 10 *. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système suivant : $\begin{cases} 3x & \equiv & 1 & (4) \\ 2x & \equiv & 7 & (9) \end{cases}$