
Feuille d'exercices n° 1

Divisibilité

Exercice 1. Parmi les nombres suivants, quels sont ceux qui divisent 12 ?

$$a = 24 ; \quad b = -6 ; \quad c = 4 ; \quad d = 12 ; \quad e = 9.$$

Exercice 2. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $(n+2)^2 - n^2$ est divisible par 4.

Exercice 3. Déterminer les entiers naturels n tels que $n \mid n+8$.

Exercice 4. Montrer par récurrence que si a est un entier impair, alors 2^{n+1} divise $a^{2^n} - 1$.

Division euclidienne

Exercice 5. Pierrot a 20 euros. Il veut acheter des billes. Sachant qu'un sachet de billes coûte 6 euros, quel est le nombre maximal de sachets de billes qu'il peut acheter ? Combien lui restera-t-il d'argent ?

Exercice 6. Une bande de brigands est constituée de 7 groupes de 3 brigands. Ils veulent se partager un butin, composé de N pièces d'or identiques. S'ils partagent le butin entre les 21 brigands (en donnant à chacun le même nombre de pièces), il reste 12 pièces. Quel sera le nombre de pièces restantes s'ils décident de partager le butin entre les 7 groupes (en donnant à chaque groupe le même nombre de pièces) ?

Exercice 7. Déterminer tous les entiers naturels qui, dans la division euclidienne par 3, donnent un quotient égal au double du reste.

Exercice 8. On fait la division euclidienne d'un entier n par 137 et 143. Les quotients sont égaux et les restes respectifs sont 131 et 5. Quel est cet entier n ?

pgcd (définition et algorithme d'Euclide)

Exercice 9. Calculer le pgcd de 195 et 143 avec l'algorithme d'Euclide.

Exercice 10. Montrer qu'il n'existe pas d'entiers m et n tels que $m+n = 101$ et $\text{pgcd}(m, n) = 3$.

Exercice 11. Soit n un entier positif. Pour quels n la fraction $\frac{2n+1}{6n+5}$ est-elle irréductible ?

Exercices supplémentaires

Exercice 12. a et b sont deux entiers naturels. Le pgcd de a et b est égal à 2. Quand on applique l'algorithme d'Euclide à a et b , le premier reste nul est r_4 et les quotients successifs obtenus sont : $q_1 = 1, q_2 = 3, q_3 = 1, q_4 = 2$. Déterminer a et b .

Exercice 13. Soit n un entier positif et $x = \frac{2n+18}{n+3}$. Déterminer les entiers n pour lesquels x est un entier.

Exercice 14*.

a) Déterminer les diviseurs de 25.

b) Déterminer les entiers naturels a et b tels que $a^2 - b^2 = 25$.

Exercice 15*. On range 461 pots de yaourt dans des caisses identiques. La règle est de ne pas commencer une caisse avant d'avoir fini la précédente. A la fin, on a rangé les pots dans 14 caisses. Combien de pots contient une caisse pleine ? Combien de pots contient la dernière caisse ?

Exercice 16. Montrer que pour tout entier naturel n , $3^{3n+3} - 26n - 27$ est divisible par 169.