Interrogation du 15 avril 2016 – durée : 30 minutes

Documents, calculatrices et téléphones portables interdits

Exercice 1. Soit $T\colon [0,1[\to [0,1[$ la fonction définie par $T(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x \in [0,1/2[\\ 2x-1 & \text{si} \quad x \in [1/2,1[\end{cases}$

On rappelle que, pour tout point $x \in [0,1[$, on définit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad s_n(x) = 0 \text{ si } T^n(x) \in [0,1/2[\,, \quad s_n(x) = 1 \text{ si } T^n(x) \in [1/2,1[\,,$$

et on associe à x son codage $(s_n(x))_{n\geq 0}$. On rappelle que $(s_n(x))_{n\geq 0}$ est également la suite des chiffres du développement en base 2 de x.

a) Soit $x_0 = \frac{1}{3}$. Quelle est la trajectoire de x_0 et quel est son codage ?

b) Que doit vérifier le codage d'un point $x \in [0,1[$ pour qu'on ait : $\exists k \in \mathbb{N}$, $T^k(x) = x_0$?

Exercice 2. On considère le système dynamique $\sigma\colon \Sigma \to \Sigma$.

On rappelle que Σ est l'ensemble des suites infinies composées de 0 et de 1 :

$$\Sigma = \{(a_n)_{n\geq 0} \mid \forall n \in \mathbb{N}, a_n \in \{0,1\}\}$$

et que l'application $\sigma\colon \Sigma \to \Sigma$ est le décalage : $\sigma((a_0, a_1, a_2, \ldots)) = (a_1, a_2, \ldots)$.

Parmi les éléments de Σ, on note X l'ensemble des suites $(a_n)_{n\geq 0}$ telles que $a_0 = a_2 = 1$.

a) Déterminer tous les points $A = (a_n)_{n\geq 0}$ tels que $A \in X$ et $\sigma^4(A) = A$.

b) Déterminer tous les points périodiques $A \in X$ qui sont de période 4.