Interrogation du 21 avril 2017 – durée : 45 minutes

Documents, calculatrices et téléphones portables interdits

Exercice 1. Soit $T\colon [0,1[\to [0,1[$ la fonction définie par $T(x) = 2x \bmod 1$, c'est-à-dire

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x \in [0,1/2[\\ 2x-1 & \text{si} \quad x \in [1/2,1[\end{cases}$$

On rappelle que, pour tout point $x \in [0,1[$, on définit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad s_n(x) = 0 \text{ si } T^n(x) \in [0,1/2[\,, \quad s_n(x) = 1 \text{ si } T^n(x) \in [1/2,1[\,,$$

et on associe à x son codage $S(x) = (s_n(x))_{n\geq 0}$. On rappelle que $(s_n(x))_{n\geq 0}$ est également la suite des chiffres du développement en base 2 de x.

a) Quel est le codage de $x_0 = \frac{3}{16}$?

b) Montrez que le codage d'un point x commence par 00 si et seulement si $x \in [0,1/4[$.

c) Donnez le codage de tous les points $x \in [0,1/4[$ vérifiant $T^3(x) = x$. Combien y a-t-il de points périodiques de période 3 dans $[0,1/4[$?

d) Existe-t-il un point périodique de période 2 dans $[0,1/4[$?

Exercice 2. On considère le système dynamique donné par $\sigma\colon \Sigma \to \Sigma$, où Σ est l'ensemble des suites infinies composées de 0 et de 1 ($\Sigma = \{(a_n)_{n\geq 0} \mid \forall n \in \mathbb{N}, a_n \in \{0,1\}\}$), et l'application $\sigma\colon \Sigma \to \Sigma$ est le décalage :

$$\sigma((a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots)) = (a_1, a_2, a_3, \ldots).$$

Parmi les éléments de Σ, on note Σ' l'ensemble des suites $(a_n)_{n\geq 0}$ telles que

$$\text{si } a_n = 1, \text{ alors } a_{n+2} = 0.$$

a) Combien y a-t-il de points fixes dans Σ' ? Déterminez-les.

b) Combien y a-t-il de points périodiques de période (exactement) 2 dans Σ' ? Déterminez-les.