Corrigé de l'interrogation du 15 avril 2016

Exercice 1.
a) $x_0 = \frac{1}{3} \in [0, \frac{1}{2}[$ donc $s_0(x_0) = 0$ et $T(x_0) = 2 \times x_0 = \frac{2}{3}$.
$\frac{2}{3} \in [\frac{1}{2}, 1[$ donc $s_1(x_0) = 1$ et $T^2(x_0) = 2 \times T(x_0) - 1 = \frac{1}{3} = x_0$.
On en déduit que x_0 est un point périodique de période 2.
Sa trajectoire est $(T^n(x_0))_{n\geq 0}$ avec $T^n(x_0) = \frac{1}{3}$ si n est pair et $T^n(x_0) = \frac{2}{3}$ si n est impair.
Le codage de x_0 est $(0, 1, 0, 1, 01, \ldots) = (\overline{0, 1})$.

b) On sait que deux points sont égaux si et seulement si leurs codages sont égaux (rappelons que, dans le cas présent, chaque point a un unique codage par définition). Or le codage de $T^k(x)$ est $(s_k(x), s_{k+1}(x), \ldots) = (s_{k+n}(x))_{n\geq 0}$. Donc $T^k(x) = x_0 \Leftrightarrow (s_{k+n}(x))_{n\geq 0} = (\overline{0, 1})$.
On en déduit qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $T^k(x) = x_0$ si et seulement si le codage de x se termine par $(\overline{0, 1})$ (c'est-à-dire que le codage de x vaut $(a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$, avec $a_0, \ldots, a_{k-1} \in \{0, 1\}$).

Exercice 2.
a) Soit $A = (a_n)_{n\geq 0} \in \Sigma$. Le point A appartient à X si et seulement si $a_0 = a_2 = 1$, et $\sigma^4(A) = A$ si et seulement si $A = (\overline{a_0, a_1, a_2, a_3})$. Donc les points $A \in X$ tels que $\sigma^4(A) = A$ sont : $(\overline{1, 0, 1, 0})$, $(\overline{1, 0, 1, 1})$, $(\overline{1, 1, 1, 0})$, $(\overline{1, 1, 1, 1})$.

b) Les points périodiques $A \in X$ de période 4 sont ceux qui vérifient $\sigma^4(A) = A$ et $\sigma^k(A) \neq A$ si $1 \leq k \leq 3$. Ils figurent donc parmi les points trouvés en a). Le point $A = (\overline{1, 0, 1, 0})$ vérifie $\sigma^2(A) = A$ donc il n'est pas de période 4. Le point $A = (\overline{1, 1, 1, 1})$ vérifie $\sigma(A) = A$ donc il n'est pas de période 4. Les deux autres points trouvés en a) sont bien de période 4.
Les points cherchés sont : $(\overline{1, 0, 1, 1})$, $(\overline{1, 1, 1, 0})$.