Corrigé de l'interrogation du 12 février 2016

On considère le système dynamique donné par $f\colon [0,+\infty[\to [0,+\infty[$, $f(x)=\frac{1}{2}(x+x^2)$.

1. f est dérivable et $f'(x)=\frac{1}{2}+x$. Pour tout $x\geq 0$, $f'(x)\geq \frac{1}{2}>0$. D'où le tableau de variation :

	0	$+\infty$
f'	$+$	
f	0 $\nearrow$	

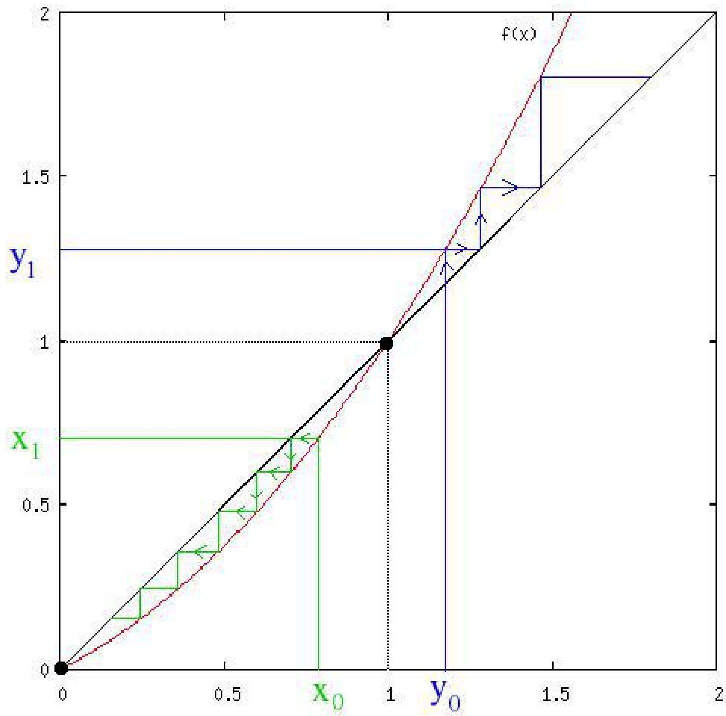
2. Soit $g(x)=f(x)-x$. Les points fixes de f sont les zéros de g.
$g(x)=\frac{1}{2}(-x+x^2)=\frac{1}{2}x(x-1)$, donc $g(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=1$.
Ces deux points appartiennent à $[0,+\infty[$. Donc f a deux points fixes : 0 et 1.

3. La position du graphe de f par rapport à la droite Δ est donnée par le signe de g. La factorisation de g à la question précédente permet de donner le signe de g :

	0		1		$+\infty$
g	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que l'ensemble des points pour lesquels le graphe de f est strictement au dessus de la droite Δ est $]1,+\infty[$.

4. Ci-dessous, le graphe de f (en rouge), la droite Δ (en noir), les points fixes (gros points noirs) et l'analyse graphique en partant de 2 points (en vert et en bleu).



5. L'analyse graphique ci-dessus montre que 0 est un point fixe attractif et 1 est un point fixe répulsif. On peut également le montrer avec la dérivée :
$f'(0)=\frac{1}{2}\in[0,1[$ donc 0 est un point fixe attractif.
$f'(1)=\frac{3}{2}>1$ donc 1 est un point fixe répulsif.

6. L'analyse graphique donne le portrait de phase suivant :