Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 4

Exercice 1. On considère les systèmes dynamiques donnés par les fonctions

$$\begin{array}{rccc} f_4\colon & [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ & x & \longmapsto & 4x(1-x) \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{rccc} g\colon & [-1,1] & \longrightarrow & [-1,1] \\ & x & \longmapsto & 1-2x^2 \end{array}$$

Montrer que f_4 et g sont conjuguées (avec une conjugaison affine).

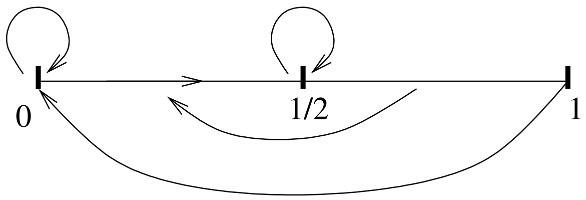
Exercice 2. On considère le système dynamique donné par la fonction

$$\begin{array}{rccc} f_2\colon & [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ & x & \longmapsto & 2x(1-x) \end{array}$$

Soit $\varphi\colon [0,1] \to [0,1]$ définie par $\forall x \in [0,1]$, $\varphi(x) = x^2$. On pose $g = \varphi^{-1} \circ f_2 \circ \varphi$.

a) Que vaut g ?

b) On rappelle que le portrait de phase de f est :



En déduire le portrait de phase de g.

Exercice 3. On admet la formule suivante :

$$(*) \qquad \forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos(3\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta).$$

(elle peut se montrer à l'aide de formules trigonométriques ou des formules d'Euler)

On considère la fonction $f\colon [-1,1] \to [-1,1]$ définie par $f(x) = 4x^3 - 3x$ (graphe ci-dessous à gauche) et la fonction $T_3\colon [0,\pi] \to [0,\pi]$ continue, affine sur chacun des intervalles $[0,\pi/3]$, $[\pi/3, 2\pi/3]$ et $[2\pi/3, \pi]$, telle que $T_3(0) = T_3(2\pi/3) = 0$ et $T_3(\pi/3) = T_3(\pi) = \pi$ (graphe ci-dessous à droite), autrement dit,

$$T_3(x) = \begin{cases} 3x & \text{si} \quad x \in [0,\pi/3] \\ 2\pi - 3x & \text{si} \quad x \in [\pi/3, 2\pi/3] \\ 3x - 2\pi & \text{si} \quad x \in [2\pi/3, \pi] \end{cases}$$

Montrer, en utilisant $(*)$, que f et T_3 sont conjuguées.