Feuille d'exercices n° 2

Notation. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, on note $\bar{\alpha}$ la classe d'équivalence de α mod 2π, et $\mathcal{C} = \{\bar{\alpha} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 1. On considère la fonction $f\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ donnée par

$$\forall \bar{\alpha} \in \mathcal{C},\ \ f(\bar{\alpha}) = \overline{2\alpha}.$$

Montrer que l'ensemble $\{\bar{\alpha} \in \mathcal{C} \mid \exists n \in \mathbb{N}, f^n(\bar{\alpha}) = \bar{0}\}$ est dense dans $\mathcal{C}$.

Exercice 2. On considère la fonction $g\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ définie par

$$g(\bar{\alpha}) = 3\alpha + \frac{1}{4}\sin(3\alpha) \bmod 2\pi.$$

a) Montrer que, pour tout arc de cercle $A \subset \mathcal{C}$ de longueur non nulle, il existe un entier $n \geq 0$ tel que $g^n(A) = \mathcal{C}$.
b) En déduire que g est sensible aux conditions initiales.

Exercice 3. On considère la fonction $f\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ donnée par

$$\forall \bar{\alpha} \in \mathcal{C},\ \ f(\bar{\alpha}) = \overline{2\alpha}.$$

Montrer que $\forall \bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \mathcal{C}$, si $\bar{\alpha} \neq \bar{\beta}$, il existe un entier $n \geq 0$ tel que $d(f^n(\bar{\alpha}), f^n(\bar{\beta})) \geq \pi/2$ (où $d(\cdot,\cdot)$ désigne la distance sur $\mathcal{C}$, c'est-à-dire la longueur de l'arc de cercle le plus court entre deux points du cercle).

Exercice 4. On considère la fonction $T\colon [0,1[\to [0,1[$ définie par $T(x) = 2x \bmod 1$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} T(x) = 2x & \text{si} \quad x \in [0, 1/2[\,, \\ T(x) = 2x - 1 & \text{si} \quad x \in [1/2, 1[\,. \end{cases}$$

Pour tout $x \in [0,1[$, on code la trajectoire de x par $S(x) = (s_n(x))_{n\geq 0}$ avec

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ s_n(x) = 0 \text{ si } T^n(x) \in \left[0, \frac{1}{2}\right[\text{ et } s_n(x) = 1 \text{ si } T^n(x) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[.$$

On rappelle que $(s_n(x))_{n\geq 0}$ est également la suite des chiffres du développement en base 2 de x.
a) Soit $x_0 = \frac{1}{3}$. Quelle est la trajectoire de x_0 et quel est son codage ?
b) Que doit vérifier le codage d'un point $x \in [0,1[$ pour qu'on ait : $\exists k \in \mathbb{N}$, $T^k(x) = x_0$?

Exercice 5. On considère la fonction $T\colon [0,1[\to [0,1[$ définie par $T(x) = 2x \bmod 1$ (comme dans l'exercice précédent).
a) Soit $x, y \in [0,1[$, $S(x) = (a_n)_{n\geq 0}$ le codage de x et $S(y) = (b_n)_{n\geq 0}$ le codage de y. Montrer que :

$$\text{si } \forall i \in \{0, 1, \ldots, k\},\ a_i = b_i,\ \text{alors } |x - y| \leq 2^{-k}.$$

b) Soit $x \in [0,1[$ et $\varepsilon > 0$. Donner le codage d'un point $z \in [0,1[$ tel que z est un point périodique et $|x - z| < \varepsilon$.
c) En déduire que les points périodiques sont denses dans $[0,1[$.