Feuille d'exercices n° 1

*Les * indiquent des exercices supplémentaires, pour ceux qui sont en avance.*

Exercice 1. Un placement financier a un taux de rendement de 5% par an et 50 euros de frais chaque année ; autrement dit, au bout d'un an on augmente le capital de 5% puis on enlève 50 euros, ce qui donne le nouveau capital. On place un capital x_0. Quel est l'évolution à long terme du capital en fonction du capital initial x_0 ?

Exercice 2.
a) Soit $f\colon [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue. Montrer que f a au moins un point fixe.
b) Donner un exemple de fonction continue $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sans point fixe.

Exercice 3. Donner des exemples de fonctions continues de $[0,1]$ dans $[0,1]$, croissantes, ayant :
– un seul point point fixe,
– plusieurs points fixes (en nombre fini),
– une infinité de points fixes.
On peut se contenter de dessiner le graphe de la fonction.

* **Exercice 4.** Soit $f\colon [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue décroissante. Montrer que f a un unique point fixe.

* **Exercice 5.** Soit $f\colon [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue croissante. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, la suite $(f^n(x))_{n\geq 0}$ converge vers un point fixe.

Exercice 6. Étudier le système dynamique donné par $f(x) = e^x$ sur $\mathbb{R}$. Pour cela, donner le tableau de variation de f, la position du graphe de f par rapport à la droite $y = x$ (donnée par le signe de $f(x) - x$), faire une analyse graphique puis donner le portrait de phase.

Exercice 7. Étudier le système dynamique donné par $f(x) = e^x - 1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8. Étudier le système dynamique donné par $f(x) = x(1 - x)$ sur $[0,1]$.

* **Exercice 9.** Étudier le système dynamique donné par $f(x) = \frac{1}{2}(x + x^2)$ sur $[0, +\infty[$.

* **Exercice 10.** On considère le système dynamique donné par $f(x) = \frac{1}{2}(x^3+x)$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer les points fixes de f, dire s'ils sont attractifs ou répulsifs. Déterminer le comportement de $(f^n(x_0))_{n\geq 0}$ selon le point initial x_0 et donner le portrait de phase de f (on pourra faire le tableau de variation de f et donner la position du graphe de f par rapport à la droite $y = x$).

* **Exercice 11.** On considère le système dynamique donné par $f(x) = \frac{\pi}{2}\sin x$ sur $[0, \pi]$. Donner les valeurs de $f(0)$, $f(\frac{1}{2})$, $f(\pi)$. Déterminer la position du graphe de f par rapport à la droite $y = x$ (on pourra utiliser la concavité de f). Déterminer le portrait de phase de f.

Exercice 12. On veut étudier le système dynamique donné par $f(x) = \frac{1}{2}(x^3 - 3x)$ sur $[-1, 1]$.
a) Étudier les variations de f et vérifier que $f([-1,1]) \subset [-1,1]$.
b) Montrer que 0 est l'unique point fixe de f. Vérifier que -1 et 1 sont périodiques de période 2. Dire si les points $0, 1, -1$ sont attractifs ou répulsifs.
c) Montrer que

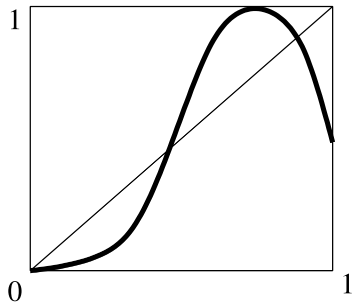
$$\begin{cases} f(x) > -x & \text{si} \quad x \in]-1,0[\\ f(x) < -x & \text{si} \quad x \in]0,1[\end{cases}$$

d) En utilisant les variations de f et la question (c), montrer que f^2 est croissante sur $[-1, 1]$ et que

$$\begin{cases} f^2(x) < x & \text{si} \quad x \in]-1,0[\\ f^2(x) > x & \text{si} \quad x \in]0,1[\end{cases}$$

e) En déduire le comportement des suites $((f^2)^n(x))_{n\geq 0}$ et $(f^n(x))_{n\geq 0}$ selon le point initial x.

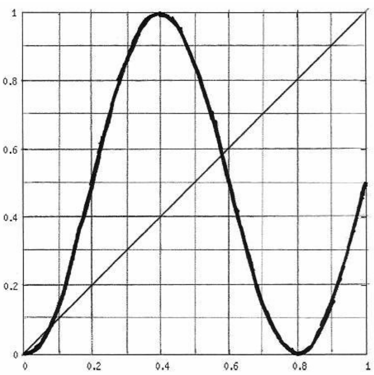
Exercice 13. On considère la fonction f dont le graphe est dessiné ci-contre.
Combien f a-t-elle de points fixes ? Sont-ils attractifs ou répulsifs ? Êtes-vous capables de dessiner le portrait de phase de f sur $[0,1]$? sur un sous-intervalle de $[0,1]$?

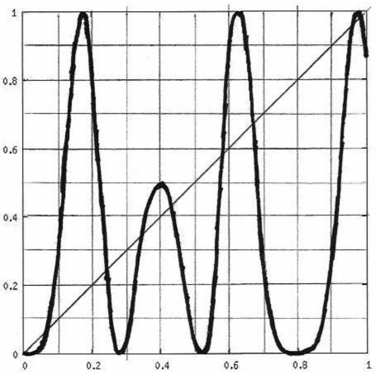


Exercice 14. Pour $\lambda \in]0,4]$, on définit la fonction $f_\lambda\colon [0,1] \to [0,1]$ par $f_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$.
a) Déterminer les points fixes de f_λ. Quand la dérivée permet de donner une réponse, dire si les points fixes sont attractifs ou répulsifs. Donner la position du graphe de f_λ par rapport à la droite $y = x$.
b) On considère le cas $\lambda \in]0,1[$. Étudier le système dynamique donné par f_λ et faire un portrait de phase de la dynamique.
c) On considère le cas $\lambda \in]1,2[$. Montrer que les deux points fixes sont dans $[0,\frac{1}{2}]$ et que $f_\lambda([0,\frac{1}{2}]) \subset [0,\frac{1}{2}]$. Donner le portrait de phase de f_λ sur $[0,\frac{1}{2}]$ puis sur $[0,1]$.

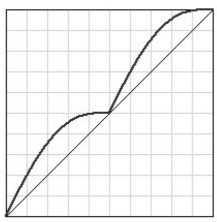
* **Exercice 15.** On veut résoudre numériquement l'équation (E) : $x = \cos(x/2)$.
a) Montrer que si x est solution de (E) alors $x \in [-1,1]$.
b) En étudiant la fonction $x \mapsto \cos(x/2) - x$, montrer que (E) a une unique solution x_0 et que $x_0 \in [0,1]$.
c) Soit $f(x) = \cos(x/2)$. Montrer qu'il existe un réel $\lambda \in]0,1/2[$ tel que, pour tout entier $n \geq 0$, $|f^n(1) - x_0| \leq \lambda^n$. Pour quelles valeurs de n a-t-on $|f^n(1) - x_0| \leq 0,001$? En déduire une approximation de x_0 à $0,001$ près.

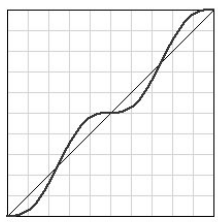
Exercice 16. On considère une fonction $f\colon [0,1] \to [0,1]$. Le graphe de f figure ci-dessous à gauche et le graphe de $f^2 = f \circ f$ ci-dessous à droite. Combien f a-t-elle de points fixes ? Combien a-t-elle de points périodiques de période 2 ? Indiquer ces points sur un des deux dessins.





* **Exercice 17.** Soit $f_1, f_2\colon [0,2\pi] \to [0,2\pi]$ les fonctions dont les graphes sont représentés ci-contre.





a) On sait que $f_1(x)$ peut s'écrire sous une des formes ci-dessous, pour un certain entier $n \geq 1$. Quelle est l'écriture de $f_1(x)$ et que vaut n ?

$$(a)\ x + \frac{1}{n}\sin(nx), \quad (b)\ x - \frac{1}{n}\sin(nx), \quad (c)\ x + \frac{1}{n}\left|\sin(nx)\right|, \quad (d)\ x - \frac{1}{n}\left|\sin(nx)\right|.$$

Faire une analyse graphique et donner le portrait de phase de f_1.
b) Mêmes questions pour f_2.