Devoir maison – à rendre en cours le 24 février 2017

Problème I. On considère la fonction $f_\lambda\colon [0,1] \to [0,1]$ donnée par $f_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$. On a commencé l'étude de f_λ dans l'exercice 14 de la feuille 1. Sa dérivée est $f'_\lambda(x) = \lambda(1-2x)$ et son tableau de variation est

	0		$1/2$		1
f_λ	0	$\nearrow$	$\lambda/4$	$\searrow$	0

On fixe $\lambda = \frac{8}{3}$. Le but de ce problème est d'étudier $f = f_\lambda$. On rappelle que, comme $\lambda \in]2,3[$, f a deux points fixes, qui sont 0 et $x_0 = \frac{\lambda-1}{\lambda} = \frac{5}{8}$, avec 0 un point fixe répulsif et x_0 un point fixe attractif. De plus, $f(x) > x \Leftrightarrow x \in]0, x_0[$.
Le graphe de f ainsi que la droite $y = x$ et les points importants sont dessinés ci-dessous.

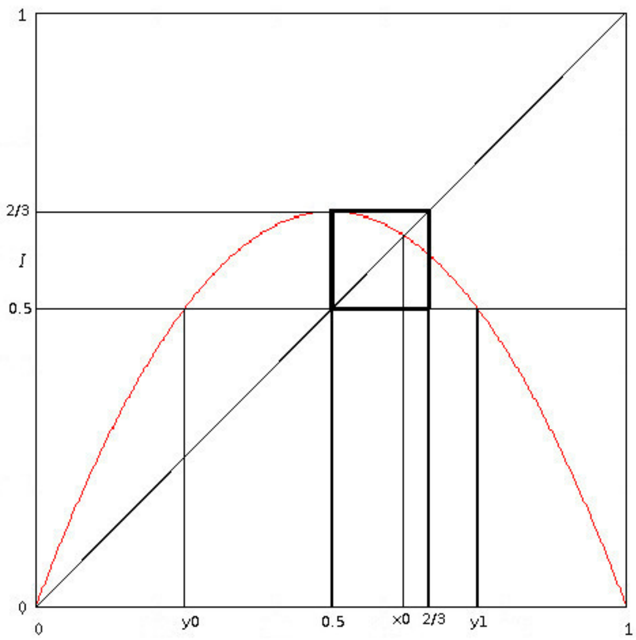
1. On pose $I = [\frac{1}{2}, \frac{\lambda}{4}]$. Montrer que $x_0 \in I$ et que $f(I) \subset I$.

2. On étudie d'abord f sur l'intervalle I. Montrer qu'il existe une constante $A \in]0,1[$ telle que $-A \leq f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$. En déduire que, pour tout $x \in I$, la suite $(f^n(x))_{n\geq 0}$ converge vers x_0. Donner le portrait de phase de f sur I.
(la dynamique de f sur I correspond au carré en gras dans le dessin ci-dessous)

3. a) Montrer qu'il existe deux points y_0, y_1 tels que $f(y_0) = f(y_1) = \frac{1}{2}$ et $y_0 < \frac{1}{2} < y_1$. Calculer ces points. Vérifier que $y_1 > \frac{\lambda}{4}$.
b) Montrer que $f([y_0, y_1]) \subset I$. En déduire la la limite de $(f^n(x))_{n\geq 0}$ pour tout $x \in [y_0, y_1]$.

4. a) Soit $x \in]0, y_0]$. On suppose que $f^i(x) \in [0, \frac{1}{2}]$ pour tout entier i tel que $0 \leq i \leq n$. Montrer que $x < f(x) < f^2(x) < \cdots < f^n(x)$.
b) En déduire que, pour tout $x \in]0, y_0]$, il existe un entier $N \geq 0$ tel que $f^i(x) \in [0, \frac{1}{2}]$ pour tout entier i tel que $0 \leq i \leq N$ et $f^{N+1}(x) > \frac{1}{2}$. Montrer que $f^{N+1}(x) \in I$.

5. Finalement, montrer que pour tout $x \in]0,1[$, il existe un entier $M \geq 0$ tel que $f^M(x) \in I$, et que la suite $(f^n(x))_{n\geq 0}$ converge vers x_0. Donner aussi le comportement de la suite $(f^n(x))_{n\geq 0}$ pour $x = 0$ et $x = 1$.



Problème facultatif

Le problème II ne fait pas partie du devoir maison. Il n'est pas obligatoire de le faire et il ne sera pas noté. C'est uniquement pour ceux qui sont intéressés.

Problème II. On considère $f_\lambda \colon [0,1] \to [0,1]$ donnée par $f_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$. Le but de ce problème est d'étudier $f = f_\lambda$ avec $\lambda = 3,2$. On rappelle que f a deux points fixes, qui sont 0 et $x_0 = \frac{\lambda-1}{\lambda} = 0,6875$, qui sont des points fixes répulsifs car $\lambda > 3$.
On pourra calculer des valeurs approchées pour montrer certaines inégalités.

1. Montrer qu'il existe deux points y_0, y_1 tels que $f(y_0) = f(y_1) = \frac{1}{2}$ et $y_0 < \frac{1}{2} < y_1$.

2. En utilisant les variations de f, montrer que f^2 a le tableau de variations suivant :

	0		y_0		$\frac{1}{2}$		y_1		1
f^2		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

3. En calculant le signe de $f^2(x) - x$ pour $x = \frac{1}{2}$ et $x = 0,6$, montrer qu'il existe $p_1 \in]\frac{1}{2}; 0,6[$ tel que $f^2(p_1) = p_1$. Montrer que p_1 est un point périodique de période 2 pour f. En déduire que $p_2 = f(p_1)$ est également un point périodique de période 2 et que $f(p_2) = p_1$.

4. Montrer que f^2 n'a pas d'autres points fixes que $0, p_0, p_1$ et p_2 (*indication : considérer le degré de $f^2(x) - x$*).

5. On peut montrer que $p_1 \simeq 0.513$ et $p_2 \simeq 0.806$, donc $\frac{1}{2} < p_1 < x_0 < \frac{\lambda}{4} < p_2 < y_1$.
On pose $I = [\frac{1}{2}, p_2]$. Montrer que $f(I) \subset I$. Déterminer le portrait de phase de f^2 sur I (*indication : on pourra utiliser la question 4 pour trouver les zéros de $f^2(x) - x$, et on pourra évaluer $f^2(x)$ en certains points pour déterminer le signe de $f^2(x) - x$*).

6. Finalement, en déduire le comportement de la suite $(f^n(x))_{n \geq 0}$ pour tout $x \in [0,1]$ (on pourra s'inspirer des questions 4 et 5 du problème I).