Contrôle des connaissances n° 2

Le test aura lieu le vendredi 6 décembre 2013

Pour les trois premières questions, trouver toutes les solutions maximales du problème posé en justifiant la méthode suivie.

1.— Résoudre l'équation différentielle $y' - 2xy = 0$ avec condition initiale $y(1) = 1$. Préciser l'intervalle de vie de la solution.

2.— Résoudre l'équation différentielle $y' - 2xy = x$. Préciser l'intervalle de vie des solutions.

3.— Résoudre l'équation différentielle $y' = 2xy^4$ avec condition initiale $y(0) = 1$. Préciser l'intervalle de vie de la solution.

4.— On considère l'équation différentielle $y' = x^2 + y$. Déterminer l'ensemble des points du plan où la pente du champ de tangentes est nulle. Tracer l'allure du champ de tangentes.

Pour les affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier votre réponse.

5.— Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \lambda e^x - x$ est une solution de l'équation différentielle $y' - y = x$.

6.— Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \lambda e^{x^2/2} - x^2 - 2$ est une solution de l'équation différentielle $y' - xy - x^3 = 0$.

7.— Si la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est solution de l'équation différentielle $y' + (x^3 \cos(x^2))y = 0$, et si $f(0) = 1$, alors $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0$.

8.— Si la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ (où I est un intervalle) est solution de l'équation différentielle $y' \sin(y) = 1$, alors $\forall x \in I,\ f(x) \neq 0$.

9.— Si la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ (où I est un intervalle) est solution de l'équation différentielle $y' = x^2y^2 + 1$, alors f est strictement croissante sur I.

10.— Si la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ (où I est un intervalle) est solution de $y' = (y-1)^2$ et si f n'est pas la fonction nulle, alors $\forall x \in I,\ f(x) \neq 0$.

11.— Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution de l'équation différentielle $y' + e^{x\sin(x)}y = 0$, et λ un réel. Alors la fonction $x \mapsto \lambda f(x)$ est aussi solution de l'équation différentielle $y' + e^{x\sin(x)}y = 0$.

12.— Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution de l'équation différentielle $y' + e^{x\sin(x)}y = 0$, et λ un réel. Alors la fonction $x \mapsto \lambda + f(x)$ est aussi solution de l'équation différentielle $y' + e^{x\sin(x)}y = 0$.

13.— Si a et b sont deux fonctions de classe C^1 définies sur $\mathbb{R}$, les solutions maximales de l'équation différentielle $y' + a(x)y = b(x)$ sont définies sur $\mathbb{R}$.

14.— Si f est une solution de l'équation différentielle $y' + \cos(x)y^2 = 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors la fonction $g : x \mapsto \lambda f(x)$ est aussi solution de l'équation différentielle $y' + \cos(x)y^2 = 0$.

15.— La fonction $g(x) = -\frac{\pi}{2}$, définie sur $\mathbb{R}$, est une sous-solution (barrière montante) pour l'équation différentielle $y' = -\sin(y)$.

16.— La fonction $g(x) = x$, définie sur $\mathbb{R}$, est une sur-solution (barrière descendante) pour l'équation différentielle $y' = \sin(y^2 - x^2) + \frac{1}{2}$.